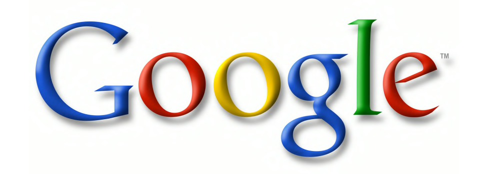
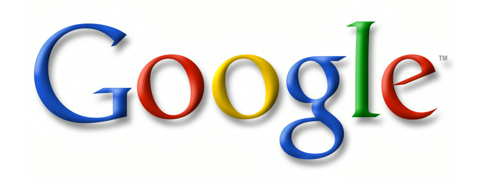




RECHERCHES
PHYSICO-MATHÉMATIQUES
SUR LA THÉORIE
DES EAUX COURANTES,

PAR R. PRONY,

Membre de l'Institut national et de la Légion d'honneur,
Directeur de l'École des ponts et chaussées.

In hâc philosophiâ (experimentali) *propositiones deducuntur ex phænomenis, et redduntur generales per inductionem.*

NEWTON, Phil. nat. Princ. mathem.

A PARIS,

DE L'IMPRIMERIE IMPÉRIALE.

An XII = 1804 v. st.

…not found.

INTRODUCTION.

La mécanique *rationnelle*, ou la science qui explique et soumet au calcul les phénomènes de l'équilibre et du mouvement, s'est rapidement élevée, depuis environ un demi-siècle, à un tel degré de perfection, qu'on peut la regarder comme offrant le premier exemple d'une *science achevée* ou *complète ;* elle fournit, sous ce point de vue, et à d'autres égards encore, des matériaux curieux à l'histoire de l'esprit humain, et elle est sur-tout remarquable par la simplicité, la fécondité et le petit nombre de ses principes, qui se réduisent à six, ou plutôt à deux, dont les quatre autres ne sont que des conséquences. On déduit de ces divers principes des règles infaillibles et sans exception pour *la mise en équation* de tous les problèmes dans lesquels on envisage des forces et des résistances appliquées à des systèmes quelconques de corps, de manière que les déterminations ultérieures des quantités cherchées ne dépendent plus que de la géométrie et de l'analyse.

Nous sommes malheureusement bien éloignés de tirer de ces règles une utilité pratique proportionnée à l'excellence des théories d'où elles découlent : les obstacles qui s'y opposent tiennent, d'une part, à l'analyse mathématique, et, de l'autre, à la physique; à l'analyse mathématique, en ce que celle-ci n'a pas toujours des méthodes ou des procédés pour l'*intégration* des équations que lui *livre* la mécanique ; à la physique, car il est des circonstances où les physiciens peuvent seuls, éclairés du flambeau de l'expérience, donner au mécanicien des notions certaines sur la nature et le mode d'action des forces dont il doit mesurer et comparer les effets ; et la recherche de ces bases de raisonnement et de calcul présente le plus souvent de très-grandes difficultés.

Ainsi voilà une science où rien, à-peu-près, ne reste à faire, si on l'envisage en elle-même et d'une manière abstraite, liée, sous le point de vue des avantages que la société en attend, à deux autres qui laissent et laisseront encore long-temps un vaste champ à l'étude et aux découvertes.

Celle des parties de la mécanique où les relations et les dépendances dont je viens donner un aperçu (et dont il est essentiel de se faire une idée précise) sont le plus manifestes, est la théorie des fluides. Si l'on considère ces corps dans l'état de fluidité parfaite ou mathématique, leurs mouvemens conduisent à des opérations d'analyse qui embarrassent et arrêtent les plus grands mathématiciens; et à ces difficultés s'en joignent de nouvelles, lorsqu'on veut avoir égard à certaines résistances que la physique apprend à connaître et à classer.

Ces résistances, dues à la *cohésion* et à l'espèce de *frottement* dont les fluides sont susceptibles, ont, sur le mouvement, une influence comparable à celle de la pesanteur; on ne saurait les négliger sans s'exposer à commettre des erreurs graves, à arriver à des conséquences entièrement contraires aux observations dans des déterminations d'une grande importance; enfin les examens qu'elles rendent nécessaires, sont du plus haut intérêt pour la science et l'art de l'ingénieur.

Il serait donc fort à desirer qu'on eût une théorie physico-mathématique des fluides, fondée sur les principes rigoureux de la mécanique, enrichie et vérifiée par l'expérience, et dont l'application n'exigeât pas des calculs difficiles. Je me suis particulièrement attaché à traiter les principaux points de cette théorie dans des ouvrages imprimés, ou déposés en manuscrit à l'École des ponts et chaussées; et pour désigner sans équivoque l'objet spécial de celui dont j'ai à entretenir le lecteur, je vais d'abord faire une récapitulation sommaire des phénomènes du mouvement des fluides sur lesquels l'attention des constructeurs doit principalement se porter, en les considérant avec les diverses circonstances physiques qui les accompagnent.

Ces phénomènes sont :

Ceux dépendans de ce qu'on nomme *la résistance des fluides*, et comprenant les actions qu'exercent l'un sur l'autre un corps fluide et un corps solide lorsque celui-ci est en mouvement et le premier en repos, ou réciproquement;

Les écoulemens par les orifices, les ajutages, les déversoirs, &c. (j'ai publié, il y a deux ans, un Mémoire sur le *jaugeage des eaux courantes*, qui se rapporte à cette seconde classe de phénomènes, et qu'il ne faut pas confondre avec le Traité que je publie en ce moment);

Enfin les mouvemens qui ont lieu dans les tuyaux et les lits naturels ou factices, où les fluides peuvent parcourir d'assez grandes longueurs pour acquérir, en vertu des résistances dues à la cohésion et au frottement, une vîtesse constante.

Ces derniers mouvemens sont ceux que j'ai eus spécialement en vue dans les *Recherches physico-mathématiques* qui sont à la suite de cette Introduction; j'y examine les relations générales entre les longueurs, les pentes, les figures et les grandeurs des sections transversales, les vîtesses et les dépenses des courans d'eau contenus soit par des lits naturels ou factices, soit par des tuyaux dont les orifices extrêmes supportent des *charges* ou pressions quelconques, le tout en ayant égard aux résistances ci-dessus mentionnées.

Il n'y a pas plus de vingt-cinq ou trente ans qu'on a commencé à appliquer à ces sortes de recherches les résultats d'expériences directes et précises combinées avec une saine théorie, quoique depuis plus d'un siècle il ait paru une quantité considérable d'ouvrages relatifs à l'hydraulique. Les Italiens, qui se sont beaucoup occupés du cours des rivières et des fleuves, ont publié de vastes collections sur cette matière et sur celles qui y sont analogues. Ces publications assurent aux auteurs et aux éditeurs, des droits incontestables à la reconnaissance de la postérité. Plusieurs traités de leurs collections sont remplis de faits importans, de préceptes et de détails pratiques, dont les ingénieurs employés aux travaux hydrauliques peuvent tirer un parti très-utile; on y trouve aussi d'excellentes expériences sur la résistance des fluides et leurs écoulemens par les orifices : mais j'y ai cherché vainement des séries d'observations immédiatement applicables à l'objet spécial de mes *Recherches* &c.; et les lecteurs qui connaissent un peu leurs écrits, n'auront bientôt plus aucun doute sur ce point.

On a lieu de regretter et il est même étonnant que le célèbre *Euler*, qui, dans le cours de ses immenses travaux, a souvent dirigé son attention sur des problèmes physico-mathématiques et sur des objets d'application, n'ait pas cherché à traiter la théorie des fluides en ayant égard à la cohésion des molécules et à quelque espèce de frottement; n'eût-il fait entrer ces résistances, dans l'analyse, que sous une forme purement hypothétique, il serait curieux de savoir comment il envisageait leur effet : mais je ne connais

aucun de ses Mémoires où il en soit question. On peut distinguer parmi ceux dont il a enrichi les recueils des académies de Berlin et de Pétersbourg, et où il traite des sujets plus ou moins analogues aux eaux courantes, celui qui est inséré dans le volume de 1770 de l'académie de Pétersbourg. Il y déduit de sa théorie générale, exposée dans le volume de 1769, les solutions d'un grand nombre de beaux problèmes sur l'espèce particulière de mouvement des fluides qu'il appelle *linéaire*, et qui revient à celle dont je me suis occupé dans mes *Recherches physico-mathématiques*. La même théorie générale est appliquée, dans le volume de 1771, au mouvement *linéaire* de l'air. *Euler* semble avoir voulu épuiser ce genre de questions; et ses solutions seraient susceptibles de s'appliquer à des tuyaux d'une certaine amplitude et même à des canaux, s'il n'avait pas toujours raisonné dans l'hypothèse de la fluidité mathématique, sans avoir égard aux résistances, qui, dans l'état réel des choses, modifient l'action de la pesanteur.

Les premières déterminations dignes d'attention que je connaisse sur le mouvement de l'eau dans les canaux, en tenant compte de ces résistances, sont celles de feu *Chezy*, mon prédécesseur dans la direction de l'École des ponts et chaussées, l'un de nos plus habiles ingénieurs, et qu'on peut mettre au petit nombre des hommes supérieurs à leur réputation. Il travaillait avec *Perronet*, vers 1775, au projet du canal de l'Yvette, et il voulut assigner, par l'observation et le calcul, les rapports qui existent entre la pente et la longueur d'un canal, la grandeur et la figure de sa section transversale et la vîtesse de l'eau. Il parvint à une formule très-simple renfermant ces diverses variables, et pouvant, par une seule expérience, être rendue applicable à tous les courans. *Voyez*, sur cette formule, les articles 135 et 136 de mes *Recherches*, ci-après, où je fais voir sous quel point de vue elle est liée à la théorie générale.

Quatre ou cinq ans après, en 1779, M. *Dubuat*, officier du génie militaire, qui a eu pour coopérateurs MM. *Dobenheim* et *Benezech*, officiers du même corps, publia la première édition de ses *Principes d'hydraulique*, dont une seconde édition, enrichie d'augmentations considérables, parut en 1786. Dans l'intervalle, en 1784, l'académie de Toulouse fit paraître, avec un de ses recueils, deux Mémoires de M. *Lespinasse*, son correspondant, contenant des observations intéressantes sur l'écoulement de l'eau par les

grands orifices, et sur *la jonction et la séparation des rivières;* l'auteur avait exécuté les expériences rapportées dans ce dernier Mémoire, sur les rivières de Fresquel et d'Aude, et sur la partie du canal du Midi qui est *en aval* de l'écluse de Fresquel, vers son point de rencontre avec le lit de cette rivière.

L'ouvrage de M. *Dubuat,* fruit de dix ans d'un travail assidu, offre une nombreuse suite d'expériences, faites avec le plus grand soin, et qui m'ont été fort utiles; c'est à cet égard ce que je connais de plus exact et de plus complet. Les questions sur le mouvement de l'eau dans les tuyaux et les lits naturels, ou factices, ne sont pas les seules qu'il ait traitées : les écoulemens par les orifices, les ajutages, les déversoirs, et la résistance des fluides, entrent aussi dans son plan; c'est-à-dire qu'il y a réuni tout ce qui concerne l'hydraulique expérimentale, avec un grand nombre d'applications aux objets de pratique.

L'expression à laquelle ses résultats l'ont conduit, est beaucoup plus compliquée que celle de *Chezy,* mais aussi plus exacte et d'un usage plus sûr et plus étendu. J'ai rapporté sa formule fondamentale dans mes *Recherches physico-mathématiques,* art. 132 et 133, auxquelles je renvoie le lecteur, non-seulement pour l'examen de cette formule, mais pour les observations sur toute la partie du traité de *Dubuat* qui se rapporte spécialement à l'objet particulier que j'ai en vue.

Les résultats d'observation consignés dans les *Principes d'hydraulique,* et le classement que leur auteur avait fait, avec beaucoup de sagacité, des diverses espèces de résistances qui se manifestaient dans le mouvement des fluides, auraient pu le conduire à exprimer la somme de ces résistances par une fonction rationnelle de la vîtesse, composée de deux ou trois termes seulement : mais la gloire de cette découverte était réservée à M. *Coulomb,* membre de l'Institut national, qui lut à cette compagnie savante, il y a environ quatre ans, un fort beau Mémoire sur des *expériences destinées à déterminer la cohérence des fluides et les lois de leurs résistances, dans les mouvemens très-lents;* ce Mémoire a été publié dans le troisième volume de ceux de la classe des sciences physiques et mathématiques. L'auteur y prouve par le raisonnement et par le fait, que, dans les mouvemens qu'il a observés, on satisfait aux phénomènes en égalant la résistance à une fonction entière et rationnelle de la vîtesse, composée de deux termes

seulement, dont l'un est proportionnel à la première et l'autre à la deuxième puissance de cette vîtesse. Je parlerai, dans mes *Recherches*, art. 144 et suivans, d'un autre terme qui ne contient pas la vîtesse, mais qui est d'une petitesse telle, qu'on peut le négliger; et la comparaison que je ferai de la forme assignée par M. *Coulomb*, avec un grand nombre d'expériences, ajoutera de nouveaux motifs à ceux qui lui assurent depuis long-temps la reconnaissance des savans.

Le premier qui a eu l'heureuse idée d'appliquer la loi de M. *Coulomb* aux cas des vîtesses dont les eaux coulant dans des lits naturels ou factices sont susceptibles, est M. *Girard*, ingénieur en chef des ponts et chaussées, chargé de la direction des travaux du canal de l'Ourcq, et auteur de deux Mémoires, récemment publiés, sur la théorie des eaux courantes. Il propose d'adopter, pour valeur de la résistance, le produit d'une constante par la somme des première et deuxième puissances de la vîtesse; et déterminant cette constante d'après douze expériences de *Chezy* et de *Dubuat*, il obtient une formule qui satisfait à ces expériences avec la même précision, à-peu-près, que celle de *Dubuat*, mais qui est beaucoup plus simple.

On trouvera, art. 137 et suivans de mes *Recherches*, plusieurs observations relatives à la composition de la formule de M. *Girard*; ce qui me dispense de m'étendre ici davantage sur ce qui la concerne : j'ajouterai que l'auteur, dans un de ses Mémoires, a fait dépendre la théorie des eaux courantes, de celle du mouvement d'un système de corps solides assujetti à certaines conditions; et comme j'ai aussi traité cette matière avec détail, je renvoie, sur ce point, le lecteur aux huit premiers paragraphes des mêmes *Recherches*.

C'est dans cet état de la science que, chargé de divers examens relatifs aux canaux, j'ai entrepris de ramener les solutions de plusieurs problèmes importans qu'on peut se proposer sur les eaux courantes, à des principes qui offrissent toute la rigueur et la facilité, dans l'application, que comportent nos connaissances actuelles, tant théoriques qu'expérimentales. J'ai, en conséquence, rassemblé les meilleures expériences publiées jusqu'à ce jour sur le mouvement de l'eau dans les tuyaux de conduite et les canaux naturels et factices. Le nombre de celles qui m'ont paru propres, vu leur régularité et leur accord, à remplir l'objet que j'avais

en vue, est de quatre-vingt-deux; savoir, cinquante-une sur les tuyaux de conduite, et trente-une sur les canaux découverts. Il s'agissait de combiner ces données avec les principes de la physique et de la mécanique, afin d'en déduire des résultats généraux; mais, avant de considérer les choses sous cê point de vue, j'ai cru devoir, pour jeter un plus grand jour sur ma théorie, la faire précéder de quelques recherches sur la dynamique des corps solides, dont je vais d'abord donner une idée.

Le mouvement d'un système de corpuscules solides ou points matériels pesans, contenus par une rainure ou canal curviligne, offre une série de questions qui ont leurs analogues dans les questions relatives aux fluides, et cette analogie a fourni à M. *Girard* les principaux fondemens de sa théorie. Les rapprochemens et les éclaircissemens utiles auxquels elle donne lieu, ne me permettaient pas de passer sous silence les problèmes qui s'y rapportent; leurs solutions, accompagnées de détails et de développemens nouveaux, forment une première partie de mon travail.

On peut d'abord considérer le système dont je viens de parler comme composé d'une quantité déterminée de corps qui descendent le long d'un canal curviligne indéfini; ce système occupant et abandonnant successivement les diverses parties de la longueur du canal.

On peut aussi concevoir un canal de forme, de longueur et de position données, couvert, sur son étendue entière, de semblables corps, en imaginant qu'à chaque instant celui qui s'échappe par le point le plus bas cesse de faire partie du système, et que le vide qui tend à se former au point le plus haut est rempli par un corps qui arrive à ce point avec la vîtesse commune.

Enfin, dans l'un et l'autre de ces deux cas, les corps, ou sont liés et forment une espèce de chaîne, ou n'ont aucune liaison entre eux et sont simplement en contact, si toutefois les conditions de la *continuité* se trouvent satisfaites.

J'ai donné les solutions générales des problèmes auxquels on est conduit par ces différentes manières d'envisager les choses, en faisant entrer en considération les résistances provenant soit de l'adhérence à la paroi, soit des frottemens dus tant à la pesanteur des corps qu'à la pression résultant de leur force centrifuge.

Les questions qui ont un rapport plus immédiat avec la théorie des fluides,

exigeaient une attention particulière ; j'ai fait voir comment le mouvement pouvait être amené à l'uniformité par une résistance qui serait fonction de la vîtesse, et je suis entré dans plusieurs détails sur les phénomènes résultant des actions que les corps du système exercent les uns sur les autres.

Le premier objet d'examen sur ces actions réciproques était celui relatif à la distinction et à la détermination des cas, et des points du système, où les corps se pressent, et de ceux où ils tendent à se séparer et où ils se séparent effectivement lorsqu'ils ne sont pas liés entre eux. J'assigne la fonction qui, suivant les différens signes dont sa valeur est susceptible, indique si le système doit demeurer *continu*, ou s'il a une tendance à la *discontinuité ;* je donne la valeur générale de la *pression* dans le premier cas, et de la *traction* ou *tension* dans le second.

Je démontre que cette *pression* ou cette *tension* est nécessairement variable d'un corps à l'autre, toutes les fois que le canal n'est pas en ligne droite, ou que les élémens de son *axe* ou *directrice* ne sont pas également inclinés à l'horizon. De plus, quelle que soit la loi de sa variation, on peut assigner la position, ou instantanée ou constante, d'une espèce de *centre d'action*, remarquable en ce qu'il offre, pour le mouvement de translation, des propriétés analogues à celles du centre d'oscillation des corps pesans qui tournent autour d'axes fixes. Le centre d'action dont je parle, se trouve placé au point de passage de la partie de la masse totale où la force motrice imprimée est plus grande que l'effective, à la partie où l'effet contraire est produit ; d'où il résulte que le corps qui est placé à ce point de passage, ne gagne ni ne perd rien en vîtesse par l'action de ceux qui le précèdent ou le suivent, et que la variation de son mouvement a lieu comme s'il était séparé du reste du système.

Les actions réciproques, par *pression* ou par *traction*, des corps juxtaposés, offrent des questions de *maxima* et *minima* qui étaient sur-tout celles dont j'avais les solutions en vue. J'ai d'abord trouvé que, dans une hypothèse quelconque sur la courbure du canal, le *maximum* ou le *minimum* absolu, soit de pression, soit de tension, était au même point de passage ou *centre d'action* dont je viens de parler. Dans le cas où *l'axe* ou *directrice* du canal est une courbe plane, tracée dans un plan vertical, tous les corps étant, de plus, supposés égaux en masse, le *maximum* ou le *minimum* a lieu au point de la courbe où sa tangente est parallèle à la ligne droite

droite menée par ses deux points extrêmes; et, en général, si la courbe d'un canal, tracée en entier d'un même côté de la ligne de pente uniforme, jouit du *maximum* à un de ses points, une courbe égale et semblable, placée du côté opposé, par rapport à la ligne de pente uniforme, jouira du *minimum* au point correspondant, et réciproquement.

J'ai terminé cette première partie de mes *Recherches* par la solution d'un problème dépendant de la méthode des variations, qu'il était essentiel de ne pas ometre. Si l'on multiplie chaque élément de masse par la pression qu'il éprouve, et qu'on divise la somme des produits par celle des masses, l'une et l'autre somme étant prises dans l'étendue entière du système, le quotient représentera ce qu'on peut appeler la *pression moyenne*. Il est naturel de se demander quelle est la courbe sur laquelle cette pression est un plus grand ou un moindre, en ajoutant, pour rendre les applications plus faciles, que cette courbe aura une longueur donnée, et que la différentielle de masse est constante; et l'on trouve qu'une même chaînette, ou funiculaire, donne le *maximum* lorsqu'elle est placée au-dessous de la ligne de pente uniforme, et le *minimum* lorsqu'elle est placée au-dessus. Si la différence de niveau, entre les deux points extrêmes, est très-petite par rapport à la longueur du canal, la funiculaire se confond sensiblement avec une parabole, et le tracé de la courbe n'a, dans ce cas, aucune difficulté.

Tel est le précis de la partie de mon travail relative à la mécanique des corps solides, qui, indépendamment de l'objet que j'ai eu en vue en la plaçant dans ce Traité, fournira aux jeunes ingénieurs la matière d'un supplément utile à leurs études ordinaires de dynamique.

Mon premier soin, en passant aux questions qui se rapportent au mouvement de l'eau, a été d'examiner les changemens que subissent les résultats de l'analyse appliquée aux différens problèmes précédemment énoncés, lorsqu'on y introduit les propriétés *caractéristiques* qui distinguent les corps solides des corps fluides; et j'ajouterai que ce rapprochement entrait pour beaucoup dans les motifs qui m'ont engagé à m'occuper de semblables problèmes.

Dans le système de points matériels solides, les élémens de masse ont des grandeurs et des figures indépendantes de la grandeur et de la forme de la section transversale du canal où ils se meuvent; la force accélératrice

effective et la vîtesse sont, à un instant déterminé, constantes, depuis le premier jusqu'au dernier point; et enfin la pression dans le sens de la courbe, et celle sur la paroi, sont différentes. Dans le système fluide, au contraire, les grandeurs et les figures des tranches élémentaires dépendent de celles du canal ou du tuyau; la force accélératrice, tant imprimée qu'effective, et la vîtesse, sont variables, d'une tranche à l'autre; et la pression, dans le sens de la courbe ou directrice, se reproduit toute entière sur la paroi. Il résulte de ces différences que, même en faisant abstraction de la cohésion et du frottement, les équations du mouvement et de la pression du système fluide contiennent des termes qui ne se trouvent pas dans les équations correspondantes du système solide, et qui ne disparaissent que dans des cas particuliers, celui, par exemple, où toutes les sections transversales sont égales entre elles.

Ces détails préliminaires sont suivis d'une récapitulation des principaux résultats de l'expérience qui peuvent être employés pour l'établissement des bases d'une théorie physico-mathématique des fluides incompressibles et pesans, dans les tuyaux de conduite et les canaux découverts.

Les molécules d'eau adhèrent à presque tous les corps avec lesquels elles peuvent être en contact, et elles adhèrent aussi entre elles. Il résulte du premier fait, que si l'eau coule dans un tuyau ou sur un lit susceptibles d'être mouillés, une lame ou couche de fluide s'attache à la matière qui compose ce tuyau, ou dans laquelle ce lit est creusé; cette couche peut ainsi être regardée comme la véritable paroi qui renferme la masse fluide en mouvement. Par le second fait, la couche qui coule immédiatement sur la paroi fluide, a une tendance à s'y attacher qui retarde son mouvement naturel (celui qu'elle aurait en vertu de sa pesanteur relative); le retard de cette couche inférieure en produit nécessairement un dans la couche qui lui est superposée, et ainsi de suite; en sorte qu'on peut considérer la masse fluide comme composée d'une infinité de couches ou enveloppes dont chacune est retardée par celle qui lui est inférieure et retarde celle qui lui est supérieure.

Les résistances qui produisent ces forces retardatrices, ont des valeurs particulières vers les limites du système, ou près de la paroi, dont l'existence est mieux constatée que la cause n'en est connue : les expériences de *Dubuat* portent à croire qu'elles sont indépendantes, et de la matière

du tuyau ou du lit, et de la pression ou charge que la paroi ou la couche fluide supporte; phénomènes bien différens de ceux qu'on remarque dans le mouvement des corps solides glissant les uns sur les autres.

Il est naturel de penser que ces résistances sont proportionnelles, et aux surfaces de contact sur lesquelles elles ont lieu, et à une certaine fonction de la vîtesse; l'observation confirme cette conjecture générale, puisque, dans tous les courans dont le régime est établi, la vîtesse de chaque couche ou enveloppe fluide devient uniforme, en vertu de l'équilibre qui s'établit entre la force accélératrice que la pesanteur lui imprime, et les forces retardatrices susmentionnées.

Mais, par une conséquence nécessaire des différentes valeurs de ces forces retardatrices, à différentes distances de la paroi, les vîtesses constantes des couches ou enveloppes fluides varient, d'une couche à l'autre, dans la même section transversale; elles ont, près de la paroi, leurs plus petites valeurs, qui augmentent progressivement, à mesure qu'on s'éloigne de cette paroi, jusqu'à un filet central où se trouve le *maximum* de vîtesse.

La première application que j'ai faite de ces données d'expérience, a été d'examiner les circonstances du mouvement d'un filet fluide, en m'assujettissant à une marche d'analyse semblable à celle suivie pour la solution des problèmes relatifs à un système de molécules solides : j'ai donné l'évaluation de la vîtesse et de la pression à une section transversale quelconque, en supposant la résistance une fonction indéterminée de la vîtesse, et j'ai examiné l'effet de cette résistance pour réduire le mouvement à l'uniformité; ce qui fournissait de nouveaux moyens de comparaison entre les résultats relatifs au système solide et au système fluide.

Mais si, au lieu d'un filet fluide, on considère un assemblage de filets, ou plutôt une réunion de couches enveloppées les unes dans les autres, depuis un axe commun, ou filet central, jusqu'à la paroi, les décroissemens de vîtesse dont j'ai parlé plus haut, auront lieu d'une couche à l'autre, et la considération des phénomènes du mouvement deviendra beaucoup plus compliquée. On peut cependant, en exprimant la résistance contre la paroi par une fonction indéterminée de la vîtesse de la couche qui lui est juxta-posée, et les résistances réciproques des couches qui coulent les unes sur les autres, par des fonctions également indéterminées de leurs vîtesses relatives, poser l'équation différentielle du mouvement

d'une couche quelconque. Examinant ensuite, indépendamment de l'expérience, les formes dont seraient susceptibles les fonctions que cette équation renferme, on trouve que l'uniformité du mouvement ne peut pas résulter de l'hypothèse dans laquelle on ferait la résistance due à la cohésion entre les molécules fluides, proportionnelle à la vîtesse simple. D'autres considérations, et l'examen des phénomènes observés, donnent aussi lieu de penser qu'une expression de la résistance qui la ferait croître indéfiniment avec la vîtesse, ne serait pas applicable à toutes les valeurs de cette vîtesse. Ainsi voilà une infinité de formes exclues; mais il en reste encore une infinité qui, sous le point de vue analytique, pourraient être introduites dans les équations de mouvement des couches.

D'un autre côté, si, sans rien prononcer sur ces formes de fonctions, on fait la somme de toutes les forces motrices effectives que reçoivent les couches en vertu de la pesanteur combinée avec les résistances qui la modifient, on parvient à une valeur de la force *motrice moyenne* qui ne contient plus aucune des fonctions provenant des actions des couches les unes sur les autres, et qui est composée des termes dus à la pesanteur, et aux résistances qui s'exercent contre la paroi; on se rend raison, d'une manière générale, de ce résultat, en faisant attention que l'adhésion des molécules entre elles a, sur les forces motrices imprimées, l'unique effet d'en opérer une distribution ou dissémination particulière dans la masse fluide, mais ne diminue pas la somme de ces forces, et que si une partie d'entre elles est perdue ou anéantie pour le système, cette destruction ne peut être attribuée qu'à la résistance qui a lieu contre la paroi.

Ainsi voilà une expression de la force *motrice moyenne* qui ne renferme d'autres fonctions indéterminées que celle de la vîtesse contre la paroi, et qui égalée à zéro doit donner la valeur de cette vîtesse, lorsque le mouvement est parvenu à l'uniformité; le point essentiel serait d'avoir une équation pareille pour la *vîtesse moyenne* : mais d'après les relations qui lient celle-ci à la précédente (relations que j'ai déterminées, dans le cours de mes recherches, par d'excellentes expériences de *Dubuat*), on est assuré que, dans le cas de l'uniformité du mouvement, une expression déduite de la théorie des fluides, et composée de termes relatifs à la pesanteur, aux dimensions et à la figure du canal ou du tuyau, doit être

égale à une certaine fonction de cette *vîtesse moyenne ;* et la recherche de cette fonction est un objet de grande importance.

Pour y procéder de manière à donner le plus possible aux faits et le moins possible aux considérations systématiques, j'ai observé que, dans toutes les hypothèses sur cette fonction inconnue de la vîtesse moyenne à laquelle est proportionnelle la résistance qui rend le mouvement uniforme, on peut toujours avoir son développement en une suite ordonnée suivant les puissances entières de la variable.

Le premier terme de la suite, qui est une quantité indépendante de la vîtesse, se rapporte, d'une part, à l'inclinaison que doit avoir le canal ou le tuyau pour que le mouvement soit prêt à naître (inclinaison qui existe dès qu'on admet l'adhérence), et, de l'autre, à la forme et aux dimensions qu'il faudrait donner à la section transversale pour que la totalité du fluide qui y est contenu, y restât adhérente.

L'évaluation de ce premier terme dépend d'expériences très-délicates, qui n'ont pas été faites ; mais on n'en est pas moins assuré qu'il est d'une telle petitesse, qu'on peut le négliger dans les objets d'application que j'ai eus en vue.

Il reste à considérer les deuxième, troisième &c. termes de la suite. Le deuxième se rapporte naturellement aux très-petites vîtesses ; et comme on sait d'ailleurs, par des observations dignes de la plus grande confiance, que les première et deuxième puissances de la vîtesse satisfont aux phénomènes, lorsque sa valeur est comprise entre certaines limites, il fallait d'abord examiner si ces limites renfermaient les plus grandes vîtesses auxquelles mes résultats doivent s'appliquer.

Les expériences que j'avais à employer pour cet examen, étant nombreuses et exactes, il était important de leur donner à toutes la plus grande influence possible sur les déterminations des constantes ; et voici un procédé aussi simple et facile que sûr, dont j'ai fait usage pour remplir cette condition, et qui pourra, je crois, être appliqué utilement à un grand nombre de recherches du même genre.

J'avais une équation de la forme $Q = au + bu^2$, u étant la vîtesse moyenne, a et b des constantes à déterminer, et Q une fonction de la longueur, de la pente, des charges d'eau sur l'une et l'autre extrémité, et du diamètre ; divisant par u, j'ai eu un premier membre $\frac{Q}{u}$, dont chaque

expérience me donnait une valeur particulière; et la vérification de la fonction hypothétique se réduisait à examiner si la série des valeurs était telle, que l'une quelconque fût composée d'une quantité constante et d'une autre quantité proportionnelle à u, et, dans le cas où cette condition serait remplie, aux anomalies près, à déterminer a et b de manière à répartir également et à diminuer le plus possible ces anomalies.

J'avais, dans cette manière de procéder, le grand avantage de pouvoir profiter des belles méthodes de correction d'anomalies que M. *de Laplace* a données dans sa *Mécanique céleste*, qu'il a appliquées aux opérations faites pour déterminer la figure de la terre, et dont je parlerai avec quelque détail à la fin de cette Introduction.

L'équation $\frac{Q}{u} = a + bu$ appliquée aux cinquante-une expériences sur les tuyaux, dont les diamètres variaient depuis 3 jusqu'à 50 centimètres, et les longueurs depuis 3 jusqu'à près de 2300 mètres, a fourni des valeurs de a et b telles, que l'équation conclue redonnait toutes les vîtesses observées, sans que les écarts, valeur moyenne, excédassent $\frac{1}{25}$ ou $\frac{1}{30}$ en plus ou en moins. Je ne m'attendais pas à cette précision; et eût-elle été moindre, je m'en serais contenté, eu égard à la variété des circonstances qu'offraient des expériences nombreuses, faites par plusieurs observateurs qui avaient travaillé séparément et avec des appareils différens.

La vîtesse moyenne était toujours connue, dans les expériences sur les tuyaux, par la comparaison du volume d'eau écoulé pendant un temps déterminé, avec la section transversale; il n'en était pas de même d'une partie des expériences sur les canaux découverts, où la vîtesse moyenne ne pouvait s'obtenir qu'en la déduisant de celle à la surface. J'ai déjà dit que *Dubuat* avait fait d'excellentes expériences pour connaître la relation entre ces deux vîtesses; il en a déduit une formule qui m'a servi pour un examen provisoire de huit expériences dont M. *Girard* a fait usage dans un de ses Mémoires : mais quand il s'est agi des déterminations ultérieures fondées sur les trente-une expériences, j'ai voulu que les vîtesses moyennes fussent déduites de celles à la surface avec toute l'exactitude que comportaient les données de fait sur lesquelles leur évaluation générale pouvait se fonder. La formule de *Dubuat* reproduit ces données, entre certaines limites de vîtesse, avec assez d'exactitude; mais, considérée sous un point

de vue général, elle est incompatible avec la nature des phénomènes, en ce qu'elle ne rend pas les vîtesses à la surface et moyenne nulles en même temps, et qu'elle semble indiquer, contre le témoignage de tous les faits, que dans certains cas la vîtesse est plus petite à la surface qu'au fond.

Après quelques réflexions et quelques essais pour avoir une expression simple adaptée à la nature des phénomènes, qui remplît et ces conditions et celle aussi indiquée par les observations, de rendre égales les vîtesses à la surface et moyenne, lorsqu'elles acquièrent des valeurs très-grandes ou infinies, j'ai trouvé, u étant la vîtesse moyenne et v la vîtesse à la surface, qu'une équation de la forme $u = \frac{v(v+a)}{v+b}$ offrait, à cet égard, tout ce qu'on pouvait desirer. Quoiqu'elle ait un diviseur variable, elle peut cependant, par des transformations très-simples, se mettre sous une forme qui la rende propre à être comparée aux expériences, comme celle trouvée pour les tuyaux : aussi les constantes a et b ont-elles été déterminées de manière à reproduire les vîtesses observées avec une exactitude très-supérieure à celle que donne la formule de *Dubuat*, qui, de plus, est d'un calcul moins expéditif que la mienne.

Cette nouvelle formule, pour la détermination de la vîtesse moyenne, a eu une seconde vérification, lorsque j'ai combiné les valeurs qu'elle donnait, avec leurs analogues obtenues immédiatement dans plusieurs expériences sur les canaux : ces valeurs, tant déduites qu'observées, avaient entre elles à-peu-près le même accord que si elles eussent toutes été obtenues par un même mode de détermination; ce qui n'avait plus lieu en calculant les premières par la formule de *Dubuat.*

Les trente-une expériences sur les canaux découverts étant ainsi ramenées à n'offrir que des données comparables, je les ai rapportées à une équation de même forme que celle adoptée pour les tuyaux de conduite, en égalant l'expression $au + bu^2$ à une fonction de la longueur, de la pente de la section transversale, et du périmètre de cette section, donnée par la théorie du mouvement des fluides. J'ai aussi employé, pour la détermination des constantes et la correction des anomalies, les mêmes méthodes qui m'avaient déjà si bien réussi, et j'ai obtenu la même exactitude.

Les valeurs des vîtesses d'expérience qui m'ont servi pour l'établissement

de mes formules, sont comprises entre les limites de 4 et de 230 centimètres. La forme $au + bu^2$ satisfait donc aux observations dans toute cette étendue ; et elle y satisfait même si exactement, qu'on pourrait l'appliquer avec sécurité à des vîtesses plus considérables : mais la pratique en fournit très-rarement ; et les deux premières tables, *pag. 105* et *111*, calculées de centimètre en centimètre depuis la vîtesse de $0^m,01$ jusqu'à celle de $3^m,00$, peuvent être considérées comme excédant les limites des cas ordinaires d'application.

Cinq tableaux très-étendus et très-détaillés font apercevoir d'un coup-d'œil les matériaux de toutes les déterminations dont je viens de parler, et fournissent un moyen facile de les rapprocher et de les comparer ; ces tableaux sont comme les pièces justificatives de toutes les propositions contenues dans l'ouvrage.

On voit, par ce résumé, de quelle utilité peuvent être, pour la formation et l'examen des projets les plus importans, les recherches auxquelles je me suis livré : j'y ai mis tout le soin et toute l'attention dont je suis capable ; et j'ai lieu d'espérer qu'on les jugera dignes de quelque confiance, puisqu'elles sont fondées sur un nombre considérable d'excellentes expériences combinées ensemble, de manière que chacune en particulier a, sur les conclusions générales, toute l'influence qu'elle doit avoir ; et comme ces expériences sont comprises entre des limites qui renferment tous les cas de pratique, un résultat, calculé par mes formules, se trouve toujours comme environné et appuyé de résultats d'observations qui lui servent de vérification et de garantie.

Les trois derniers paragraphes de mes *Recherches* sont entièrement consacrés aux applications pratiques des principes établis dans le cours de l'ouvrage, en commençant par les tuyaux de conduite, et passant ensuite successivement aux canaux à pente uniforme et aux canaux à pente variable.

Le lecteur remarquera, dans les applications relatives aux tuyaux, la détermination très-importante pour le calcul des machines hydrauliques, de la perte de force motrice due à la résistance que les parois des conduites et la viscosité apportent au mouvement de l'eau ; on n'avait encore rien de précis sur son évaluation, qui s'est trouvée naturellement liée à mes recherches, dont elle est une conséquence immédiate.

J'avais

J'avais eu d'abord le projet de traiter les questions relatives aux phénomènes qui dépendent de la courbure des lits des courans dans le sens horizontal, et à ceux qui ont lieu aux endroits où ces lits éprouvent des changemens brusques ou rapides soit dans leurs profils longitudinaux, soit dans leurs sections transversales : mais l'étendue des développemens nécessaires pour ne rien omettre d'essentiel sur les objets que j'avais principalement en vue, et auxquels tenaient mes résultats fondamentaux, m'a déterminé à réserver pour un autre ouvrage ces questions, qui d'ailleurs ont été traitées par *Bossut* dans son *Hydrodynamique*, par *Dubuat* dans ses *Principes d'hydraulique*, par *Girard* dans son *Rapport sur le canal de l'Ourcq*, et par d'autres auteurs.

J'ai parlé de cinq tableaux de résultats et de deux tables ordonnées par rapport aux vîtesses : l'ouvrage contient encore deux tables à double entrée, *pag. 116* et *122;* l'une ordonnée par rapport aux diamètres et aux dépenses des tuyaux, et l'autre relative aux sections transversales des canaux. Ces neuf tableaux, ou tables, ont été calculés par M. *Gouilly*, ingénieur, et par MM. *Vallée* et *Vauthier*, élèves de l'École des ponts et chaussées, qui m'ont donné en cette occasion de nouvelles preuves du zèle et des talens que je leur connaissais déjà.

Je terminerais ici mon Introduction, si je ne voulais parler que des objets qui me sont propres, et s'il n'était pas essentiel d'y joindre l'explication des méthodes de correction d'anomalies de M. *de Laplace*, dont l'omission rendrait certainement mon exposition incomplète, au jugement de tous mes lecteurs. Ces méthodes ont été démontrées par leur illustre auteur, dans la *I.re partie, livre III, art. 39* et *40*, de sa *Mécanique céleste*, à laquelle j'aurais pu renvoyer : mais elles y sont présentées d'une manière purement analytique ; et comme les considérations et les constructions géométriques sont beaucoup plus familières à un grand nombre d'ingénieurs que l'analyse abstraite, j'ai ramené, en leur faveur, à des considérations et à des constructions pareilles, les développemens nécessaires pour la connaissance et l'intelligence de ces méthodes. Au surplus, les procédés graphiques que j'emploie n'altèrent en rien l'exactitude des résultats, qui, ultérieurement, sont toujours déduits du calcul, soit qu'on y arrive par la marche analytique, ou qu'on suive celle que je vais indiquer.

Problème général, dont les Méthodes exposées ci-après, et applicables à la correction des anomalies, donnent la solution.

PLUSIEURS résultats d'observation sont susceptibles d'être liés entre eux par une loi, en faisant à ces résultats de petites corrections; l'équation qui exprime cette loi, peut se mettre sous la forme

$$Z = \alpha + \beta X,$$

Z et X étant des fonctions d'une ou de plusieurs variables dont on a un certain nombre de valeurs observées immédiatement ou calculées d'après les observations; et il s'agit d'assigner aux constantes inconnues α et β, des valeurs telles, que les phénomènes soient représentés, le mieux possible, par l'équation précédente : on y parviendra par l'une des deux méthodes que je vais exposer.

PREMIÈRE MÉTHODE.

Portez sur une ligne ou axe des abscisses, les diverses valeurs de X déduites de l'expérience, et élevez, aux extrémités de ces abscisses, les ordonnées égales aux valeurs correspondantes de Z, déduites aussi de l'expérience; on aura, par cette construction, un système de points dans le plan des XZ, qui seront sur une même ligne droite si les observations n'ont besoin d'aucune correction, et qui s'en écarteront d'autant plus que les anomalies seront plus fortes; on peut même, en construisant avec soin et précision, se mettre en état de juger, à l'inspection de la figure, si la forme de l'équation hypothétique convient aux phénomènes.

Faites passer une ligne droite par deux des points de ce système, tellement placés, que tous les autres points se trouvent d'un même côté par rapport à cette ligne indéfiniment prolongée; menez, par l'un de ces deux points et par un troisième point placé convenablement, une seconde ligne droite qui remplisse la même condition, et ainsi de suite jusqu'à ce que vous ayez enveloppé le système de points par un polygone fermé dont tous les angles seront saillans, chacun de ces angles ayant son sommet à un des points du système.

Il y aura un des côtés de ce polygone (que je désignerai par K, en nommant X' et X''' les abscisses correspondantes à ses extrémités) tellement situé, que, si on lui mène une parallèle qui ne rencontre le

polygone qu'en un seul point ou sommet d'angle, dont je désignerai les coordonnées par X'' et Y'', la distance entre ces parallèles, prise parallèlement aux Z, sera plus petite que toute autre distance, prise de la même manière, entre un autre côté quelconque du polygone et la parallèle à ce côté, qui, ainsi que celle dont on vient de parler, ne rencontrerait le polygone qu'en un seul point.

Il est essentiel d'ajouter, relativement aux conséquences à tirer de ce cas de *minimum*, qu'il a lieu non-seulement parmi les couples de parallèles dont chacune appartiendrait à un côté et à un sommet d'angle du périmètre, mais, à plus forte raison, parmi les couples dont chacune n'aurait de commun avec le polygone que deux sommets d'angles, situés à deux limites opposées du périmètre. Pour s'en convaincre, il suffit de faire attention qu'on peut toujours, en conservant le parallélisme des deux lignes de l'une quelconque de ces dernières couples, faire tourner chacune de ces lignes autour du sommet d'angle qui est un des points de sa direction, dans un sens tel, que la distance entre les deux lignes, prise parallèlement aux Z, diminue : or, la rotation continuant à avoir lieu dans ce même sens, et, par conséquent, la distance prise parallèlement aux Z continuant à diminuer, l'une des deux lignes de la couple arrivera nécessairement à la coïncidence avec l'un des côtés du périmètre du polygone qui se trouve adjacent au sommet de l'angle par lequel passe cette ligne; donc &c. le cas unique de deux sommets d'angles, placés sur une même parallèle aux Z, donnera l'invariabilité de distance. Tout cela est extrêmement aisé à vérifier.

Pour évaluer α et β, vous aurez, Z', Z'' et Z''' étant les ordonnées correspondantes à X', X'' et X''',

$$\beta = \frac{Z''' - Z'}{X''' - X'}; \quad \alpha = \tfrac{1}{2}\left[Z' + Z'' - \beta\,(X' + X'')\right];$$

et le *maximum* d'erreur étant désigné par E, on aura

$$E = \alpha + \beta X' - Z';$$

ou . . . . $E = \tfrac{1}{2}\left[Z'' - Z' - \beta\,(X'' - X')\right].$

J'observe, pour donner l'intelligence de ces résultats, que le côté K prolongé indéfiniment, et sa parallèle menée par l'extrémité de Z'', renfermant entre eux tout le polygone, on ne peut pas, d'après les conditions par lesquelles leur position est déterminée, mener, dans ce polygone, une

parallèle aux Z, se terminant de part et d'autre au périmètre, plus grande que celle, parallèle aux mêmes Z, tirée d'une de ces lignes à l'autre, et dont je fais la longueur $= 2E$.

De plus, en menant une parallèle au côté K, qui partage en deux parties égales la distance entre ce côté K et l'extrémité de Z'', les parties des directions de Z', Z'' et Z''' comprises entre les extrémités de ces ordonnées et la parallèle intermédiaire dont je viens de parler, seront toutes trois égales à E, et plus grandes que les parties des directions de toutes les autres ordonnées comprises aussi entre leurs extrémités respectives et la parallèle intermédiaire.

Or les valeurs de α et β précédemment données, sont celles qui conviennent à la position de cette même parallèle intermédiaire ; on a donc trois erreurs égales entre elles et à E, correspondantes à X', X'' et X''' (les deux erreurs extrêmes ayant des signes contraires à celui de l'erreur intermédiaire), et plus grandes que toutes les autres.

Je vais démontrer maintenant qu'en substituant à la ligne parallèle au côté K, qui remplit ces conditions, toute autre ligne droite menée dans le plan des XZ, on aura nécessairement des erreurs plus fortes que l'erreur E; ce qui est d'abord évident si cette autre ligne est toute en dehors du polygone. Supposant donc qu'elle est tracée et qu'elle traverse le polygone, désignons-la par K', et menons-lui deux parallèles, désignées par K'' et K''', dont chacune contienne ou un point ou un côté du périmètre du polygone, mais sans avoir d'intersection avec aucun des côtés de ce même périmètre; il existera nécessairement, par rapport à la ligne K', deux erreurs E' et E'' de signes contraires, telles, que leur somme (abstraction faite des signes) sera égale à la distance entre K'' et K''' prise parallèlement aux Z : mais, d'après la condition de *minimum* à laquelle le côté K du polygone satisfait, par hypothèse, on a $E' + E'' > 2E$; d'où il suit que l'une des erreurs E' ou E'' est plus grande que l'erreur E, et elles peuvent l'être toutes deux.

On voit que les opérations graphiques servent uniquement à faire discerner, parmi toutes les observations, celles qui offrent les propriétés exigées pour la détermination de α, β et E, détermination qui est entièrement fondée sur le calcul, et indépendante de toute construction; mais comme les calculateurs n'ont pas, en général, l'habitude ou les instrumens nécessaires pour faire des tracés exacts et rapportés à de grandes échelles, je leur recommande l'étude de l'article 39 du livre III de la *Mécanique*

céleste, où ils trouveront des règles de calcul qui les dispenseront de toute construction.

DEUXIÈME MÉTHODE.

Ayant les deux séries de valeurs correspondantes

$$Z_{,} \quad Z_{,,} \quad Z_{,,,} \quad \&c.$$
$$X_{,} \quad X_{,,} \quad X_{,,,} \quad \&c.$$

déduites de l'observation, on cherchera, dans le plan des XZ, la position d'un point dont les coordonnées A et B soient données par les équations

$$A = \frac{\mu_{,} X_{,} + \mu_{,,} X_{,,} + \mu_{,,,} X_{,,,} + \&c.}{\mu_{,} + \mu_{,,} + \mu_{,,,} + \&c.}$$
$$B = \frac{\mu_{,} Z_{,} + \mu_{,,} Z_{,,} + \mu_{,,,} Z_{,,,} + \&c.}{\mu_{,} + \mu_{,,} + \mu_{,,,} + \&c.};$$

ce point serait le centre de gravité d'un système de corps $\mu_{,}$, $\mu_{,,}$, &c. qui auraient, respectivement, pour coordonnées de leurs centres de gravité particuliers, $X_{,}$, $Z_{,}$; $X_{,,}$, $Z_{,,}$, &c. : mais ces quantités $\mu_{,}$, $\mu_{,,}$, $\mu_{,,,}$, &c. représentent ici des coefficiens qu'on introduit dans le calcul pour remplir certaines conditions.

Cette première détermination donne l'égalité entre la somme des produits des anomalies positives par ceux des coefficiens μ', μ'', &c. qui s'y rapportent, et la somme des produits analogues des anomalies négatives, pour toute ligne droite qui aurait A et B pour coordonnées d'un de ses points, et dont la position servirait à déterminer α et β; cette propriété peut même se déduire de celles du centre de gravité.

Il faut maintenant chercher, parmi toutes les lignes qui rempliront ces conditions, celle pour laquelle la somme totale des anomalies, prises avec le même signe, sera un *minimum*.

Je fais passer par le point, précédemment déterminé, qui a A et B pour coordonnées, deux lignes parallèles, l'une aux X et l'autre aux Z, que je nomme respectivement *axe des* ξ et *axe des* ζ (1), et je mène, de toutes les extrémités des coordonnées $Z_{,}$, $Z_{,,}$, $Z_{,,,}$, &c. des lignes droites à l'origine des ξ; ces lignes font avec l'axe des ξ, différens angles

(1) Observez que la lettre ζ est employée avec une acception différente dans le Tableau comparatif (n.° 3). La même observation est applicable à la lettre Z, colonnes 3, 4 et 10 du Tableau comparatif (n.° 2).

$a_{,}$, $a_{,,}$, $a_{,,,}$, &c. dont je place l'origine commune sur ce même axe des ξ, le premier quart de cercle positif étant supposé dans l'angle des ξ et ζ positifs.

Parmi ces angles il y en a un qui a la plus grande tangente positive, c'est-à-dire, qui approche le plus ou de $\frac{1}{2}\pi$ ou de $\frac{3}{2}\pi$ ($\pi =$ la demi-circonférence dont le rayon $= 1$), et je désigne par ξ' l'abscisse rapportée à l'origine des ξ du point auquel cette tangente se rapporte; je désigne pareillement par ξ'' l'abscisse du point correspondant à la tangente positive qui approche le plus de la précédente, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on ait épuisé les tangentes positives (celles des angles plus petits que $\frac{1}{2}\pi$ ou compris entre π et $\frac{3}{2}\pi$), après lesquelles on passera, s'il y a lieu, aux tangentes négatives, en les considérant, par rapport aux positives, comme décroissantes depuis zéro jusqu'à l'infini négatif.

On aura, ainsi, une suite d'abscisses rapportées à l'origine des ξ,

$$\xi',\ \xi'',\ \xi''',\ \&c.\ \xi^{(n-1)},\ \xi^{(n)},\ \xi^{(n+1)},\ \xi^{(n+2)},\ \&c.$$

Supposons que la somme totale de ces abscisses $= \Sigma$, et qu'on ait

$$\xi' + \xi'' + \xi''' + \&c. \ldots + \xi^{(n-1)} < \tfrac{1}{2}\Sigma;$$
$$\xi' + \xi'' + \xi''' + \&c. \ldots + \xi^{(n-1)} + \xi^{(n)} > \tfrac{1}{2}\Sigma.$$

La ligne droite d'après laquelle il faudra déterminer α et β, passera par l'origine des ξ et par l'extrémité de celle des ordonnées $Z_{,}$, $Z_{,,}$, &c. qui est à une distance $\xi^{(n)}$ de cette origine des ξ, et que je désignerai par $Z_{(n)}$, l'abscisse correspondante étant $X_{(n)}$; ce qui donnera $X_{(n)} = A + \xi^{(n)}$. Faisant, de plus, $\zeta^{(n)} = Z_{(n)} - B$, on aura

$$\beta = \frac{\zeta^{(n)}}{\xi^{(n)}};$$
$$\alpha = Z_{(n)} - \beta X_{(n)}$$

valeurs dans lesquelles il faut avoir soigneusement égard aux signes résultant des diverses positions des coordonnées.

Pour démontrer que cette construction donne le *minimum* de la somme totale des erreurs, imaginons que la tangente β est diminuée d'une quantité $\Delta\beta$, en supposant d'abord que cette diminution ne change le signe d'aucune anomalie; les anomalies correspondantes aux tangentes plus grandes que β augmenteront toutes, et la somme de leurs augmentations sera

$$(\xi' + \xi'' + \xi''' + \&c. + \xi^{(n-1)} + \xi^{(n)})\,\Delta\beta \ldots.\ (M).$$

(L'anomalie correspondante à $\xi^{(n)}$, qui était nulle, a pris une valeur $\xi^{(n)}.\Delta\beta$, dont le signe est le même que celui des anomalies croissantes.)

Les anomalies correspondantes aux tangentes plus petites que ζ diminueront toutes, et la somme de leur diminution sera,

$$(\xi^{(n+1)} + \xi^{(n+2)} + \&c.)\ \Delta\zeta \ldots\ldots\ldots (N).$$

Et l'on voit par les coefficiens de $\Delta\zeta$ dans l'une et l'autre somme, comparés avec $\frac{1}{2}\Sigma$, que celle des accroissemens surpasse celle des diminutions, puisque $[\xi' + \xi'' + \&c. + \xi^{(n)}] > [\xi^{(n+1)}\ \xi^{(n+2)} + \&c.]$.

Ce résultat aurait lieu, à plus forte raison, si la variation $\Delta\zeta$ était assez forte pour faire changer le signe d'une ou de plusieurs des anomalies; ces changemens porteraient sur un ou plusieurs termes du coefficient de $\Delta\zeta$ dans la somme *(N)*, et alors les nouvelles valeurs des anomalies de ces termes (considérées comme positives) seraient ou égales aux anciennes, ou plus petites, ou plus grandes. Dans le premier cas, les variations des anomalies disparaîtraient de *(N)*; dans le deuxième, les variations qui avaient lieu avant le changement de signe, ne feraient que se reproduire, en suivant une marche inverse; et enfin dans le troisième, les variations devraient passer de la somme *(N)* dans la somme *(M)*.

Supposons maintenant que la variation $\Delta\zeta$ augmente la tangente ζ, sans cependant changer le signe d'aucune anomalie; les anomalies qui correspondent aux tangentes plus petites que ζ, s'accroîtront toutes, et la somme de leurs accroissemens sera,

$$(\xi^{(n)} + \xi^{(n+1)} + \xi^{(n+2)} + \&c.)\ \Delta\zeta \ldots\ldots\ldots (M'),$$

plus grande que la somme des diminutions de toutes les autres anomalies, dont la valeur est,

$$(\xi' + \xi'' + \xi''' + \&c. \ldots + \xi^{(n-1)})\ \Delta\zeta \ldots\ldots (N').$$

$\xi^{(n)}$ est compris dans la première somme, parce que l'anomalie qui y est relative, de nulle qu'elle était, a pris une valeur $\xi^{(n)}\Delta\zeta$ de même signe que celles qui composent cette première somme. De plus, si $\Delta\zeta$ était assez considérable pour faire changer de signe à quelques anomalies, on prouverait par un raisonnement absolument semblable à celui fait précédemment, que l'inégalité $(M') > (N')$ n'en subsiste pas moins. Ainsi, quels que soient la valeur et le signe de la variation $\Delta\zeta$, il en résultera une augmentation dans la somme totale des anomalies, considérées toutes comme positives; les valeurs de α et ζ, données ci-dessus, conviennent donc à celle de toutes les lignes passant par l'origine des ξ, pour laquelle cette somme totale est un *minimum*.

On voit que dans cette deuxième méthode, comme dans la première, les valeurs de α et $\mathcal{C}$ s'obtiennent par le calcul, et sont entièrement indépendantes des constructions qui n'ont d'autre objet que de faire discerner parmi les observations celles qui jouissent de certaines propriétés demandées. Au surplus, il est fort aisé d'employer cette deuxième méthode sans avoir recours à aucun tracé graphique, et je ne crois pas même avoir besoin d'entrer dans aucun détail à cet égard.

APPLICATION

AUX EXPÉRIENCES FAITES SUR LES EAUX COURANTES.

I.

Mouvement de l'eau dans les Tuyaux de conduite.

La longueur d'un tuyau de conduite . . . . $= \lambda$.
Son diamètre . . . . $= D$.
La différence de niveau entre les centres de ses orifices extrêmes . . . . $= \varepsilon$.
La charge d'eau sur le centre de son orifice supérieur . . . . . $= H$.
La charge d'eau sur le centre de son orifice inférieur . . . . . $= H'$.
La vîtesse de l'eau dans le tuyau . . . . $= U$.
La force accélératrice de la pesanteur . . . . $= g$.

Posant $\frac{H + \varepsilon - H'}{\lambda} = j$,

on a l'équation

$$\tfrac{1}{4}\, g\, j\, D = \alpha\, U + \mathcal{C}\, U^2;$$

d'où $\frac{g j D}{4 U} = \alpha + \mathcal{C}\, U;\ X = U;\ Z = \frac{g j D}{4 U}$.

J'ai eu cinquante-une valeurs du premier membre de cette équation, données par l'expérience, transcrites dans la 10.e colonne du Tableau n.º 2, et correspondantes aux vîtesses U transcrites dans la 12.e colonne du même Tableau (observez que la lettre Z, qui se voit au haut des colonnes 3, 4 et 10 de ce Tableau, représente la quantité $H + \varepsilon - H'$ ci-dessus).

On a construit avec précision le polygone des valeurs de $\frac{g j D}{4 U}$, et l'on

l'on a vu d'abord qu'on pouvait tracer dans ce polygone une ligne droite qui ne donnerait pas de grandes anomalies ; ce premier examen m'a appris que la fonction composée des deux premières puissances de la vîtesse représenterait les phénomènes avec une exactitude satisfaisante ; il ne restait plus alors qu'à déterminer α et β.

I.re Méthode. La construction graphique a fait connaître, sans aucune incertitude, que les trois expériences qui fournissaient les valeurs de X', X'', X'''; Z', Z'', Z''', étaient les 38.e, 42.e et 47.e, marquées d'une étoile dans la petite table ci-après ; ce qui donne,

Expérience n.° 38.... $X' = 0{,}794259$; $Z' = 0{,}00362060$.
Expér... n.° 42.... $X'' = 0{,}968157$; $Z'' = 0{,}00306250$.
Expér... n.° 47.... $X''' = 1{,}578450$; $Z''' = 0{,}0064699$.

D'où l'on déduit par les formules de la première méthode,

$$\alpha = 0{,}00013977; \quad \beta = 0{,}00363334; \quad E = 0{,}0005\ 9$$

II.e Méthode. On a d'abord calculé les valeurs de A et B, en supposant $\mu_{,} = \mu_{,,} = \&c. = 1$, et l'on a eu

$$A = 0{,}664311; \quad B = 0{,}00250785.$$

Ensuite la construction graphique a donné, sans la moindre incertitude, la série décroissante des angles $a_{,}$, $a_{,,}$, $a_{,,,}$, &c., dont les termes se sont trouvés respectivement correspondans aux nombres de la première colonne du Tableau n.° 2, rangés dans la table suivante :

NOMBRES de la 1.re colonne du Tableau n.° 2, correspondans aux termes de la série décroissante des angles $a_{,}$, $a_{,,}$, $a_{,,,}$ &c. et rangés suivant l'ordre de grandeur de ces angles.									
32.	30.	21.	22.	17.	7.	14.	8.	18.	*42.
*38.	*47.	51.	4.	24.	2.	15.	46.	45.	35.
31.	27.	44.	40.	6.	3.	20.	11.	37.	39.
25.	50.	23.	1.	**5.	49.	13.	16.	41.	34.
29.	48.	19.	28.	12.	43.	26.	10.	36.	33.
								9.	

Il est fort aisé, au moyen de cette table et des valeurs consignées

dans le Tableau n.° 2, de vérifier, par le seul calcul, tous les résultats numériques : l'expérience n.° 5, marquée d'une double étoile, est celle qui fournit les valeurs de $X_{(n)}$, $Z_{(n)}$, $\xi^{(n)}$ et $\zeta^{(n)}$; savoir,

$$X_{(n)} = 0,111718; \quad Z_{(n)} = 0,00059072;$$
$$\xi^{(n)} = -0,552593; \quad \zeta^{(n)} = -0,00191713;$$

et ces valeurs, substituées dans les formules de la deuxième méthode, donnent

$$\alpha = 0,000203134; \quad \mathcal{C} = 0,00346934.$$

II.

Mouvement de l'eau dans les Canaux découverts.

La pente d'un canal, ou le sinus de l'angle formé par son axe et par l'horizon .... $= I$.
Le *rayon moyen*, ou le quotient de l'aire de sa section transversale divisée par le périmètre de cette section .... $= R$.
La vîtesse moyenne .... $= U$.
La force accélératrice de la pesanteur .... $= g$.

On a l'équation $\quad gRI = \alpha U + \mathcal{C} U^2;$

d'où $\quad \frac{gRI}{U} = \alpha + \mathcal{C} U; \; X = U; \; Z = \frac{gRI}{U}.$

Le Tableau n.° 3 contient trente-une valeurs de $\frac{gRI}{U}$ données par l'expérience, portées dans la colonne 5 ($\frac{\omega}{\chi}$ et $\frac{\zeta}{\lambda}$ représentent respectivement R et I dans ce Tableau), et numérotées (colonne 1) suivant l'ordre des vîtesses. On a trouvé,

I.re Méthode... $X' = 0,334043$; $Z' = 0,0010339$... *Exp.* n.° 12,
$X'' = 0,549520$; $Z'' = 0,0024567$... *Exp.* n.° 20,
$X''' = 0,765809$; $Z''' = 0,0023961$... *Exp.* n.° 25;

valeurs d'où l'on déduit

$$\alpha = 0,000352945; \quad \mathcal{C} = 0,003154; \quad E = 0,00037.$$

II.e Méthode. On a fait $\mu_{,} = \mu_{,,} =$ &c. $= 1$, comme pour les tuyaux, et l'on a trouvé d'abord

$$A = 0,467731, \quad B = 0,00182817.$$

De cette détermination on a passé à celle des termes de la série décroissante des angles $a_{,}$, $a_{,,}$, &c. correspondans respectivement aux nombres de la première colonne du Tableau n.° 3, qui sont rangés dans la table suivante :

NOMBRES de la 1.re colonne du Tableau n.° 3, correspondans aux termes de la série décroissante des angles $a_{,}$, $a_{,,}$ &c., et rangés suivant l'ordre de grandeur de ces angles.					
18.	21.	14.	13.	1.	10.
* 20.	16.	7.	26.	8.	24.
* 12.	22.	23.	9.	30.	5.
15.	27.	2.	** 29.	31.	6.
17.	11.	3.	28.	4.	* 25.
					19.

Enfin l'on a obtenu les valeurs numériques

$X_{(n)} = 0,816430$; $Z_{(n)} = 0,0028984\ldots$ *Exp.* n.° 29.
$\xi^{(n)} = 0,348699$; $\zeta^{(n)} = 0,00107023\ldots$;

desquelles on a déduit

$\alpha = 0,000392609$; $\mathcal{C} = 0,0030692$.

III.

Rapport entre la vîtesse à la surface et la vîtesse moyenne, dans les Canaux découverts.

V et U étant respectivement la vîtesse à la surface et la vîtesse moyenne, j'ai représenté leur rapport par l'équation

$$U = \frac{V(V + a)}{V + b},$$

qui peut se mettre sous la forme

$$\frac{V}{V-U} = \alpha + \mathfrak{C}V;\; X = V;\; Z = \frac{V}{V-U},$$
en faisant $\frac{b}{b-a} = \alpha$; $\frac{a}{b} = \mathfrak{C}$;

d'où l'on déduit
$$b = \frac{\alpha}{\mathfrak{C}}$$
$$a = \frac{\alpha - 1}{\alpha}\, b.$$

Le Tableau n.° 5 offre dix-sept valeurs de $\frac{V}{V-U}$, données par l'expérience, qui se réduisent à quinze en rejetant deux valeurs anomales.

On trouve, par les deux méthodes précédentes,

I.re Méthode. $X' = 0{,}4640$; $Z' = 5{,}7711 \ldots$ *Exp.* n.° 5,
$X'' = 0{,}8121$; $Z'' = 3{,}9308 \ldots$ *Exp.* n.° 10,
$X''' = 1{,}2994$; $Z''' = 6{,}8569 \ldots$ *Exp.* n.° 17;
$\alpha = 4{,}02115$; $\mathfrak{C} = 1{,}29974$; $E = 1{,}15$;
$a = 2{,}32454$; $b = 3{,}09395$.

II.e Méthode. Faisant $\mu_{,} = \mu_{,,} =$ &c. $= 1$, on trouve d'abord,
$A = 0{,}71098$; $B = 5{,}15053$.

On a ensuite, pour la série décroissante des angles $a_{,}$, $a_{,,}$, &c. les termes correspondans aux nombres de la première colonne du Tableau n.° 5, compris et rangés selon l'ordre de grandeur des angles dans la table suivante :

NOMBRES de la 1.re colonne du Tableau n.° 5, correspondans aux termes de la série décroissante des angles $a_{,}$, $a_{,,}$ &c., rangés suivant l'ordre de grandeur de ces angles.

4.	7.	13.
12.	** 3.	* 5.
14.	16.	8.
* 17.	6.	11.
1.	2.	* 10.

Et l'on obtient enfin les valeurs numériques,

$X_{(n)} = 0{,}31180$; $Z_{(n)} = 4{,}9140 \ldots$ *Exp.* n.° 3.
$-\xi^{(n)} = 0{,}39918$; $-\zeta^{(n)} = 0{,}20913$;
$\alpha = 4{,}778048$; $\mathfrak{C} = 0{,}5239$;
$a = 7{,}21147$; $b = 9{,}12016$.

Les considérations d'après lesquelles je pouvais ou faire un choix entre les résultats des deux méthodes, ou adopter des résultats particuliers, portaient principalement, 1.° sur la nécessité de rendre, en général, les valeurs absolues des anomalies d'autant moindres que les vîtesses elles-mêmes étaient plus petites; 2.° sur la plus grande réduction dont pouvaient être susceptibles les anomalies des expériences que je savais, par des renseignemens particuliers, mériter plus de confiance que les autres. J'aurais pu, relativement à la première condition, introduire dans le calcul les coefficiens $\mu_{,}$, $\mu_{,,}$, &c., en leur donnant des valeurs telles, que les anomalies auraient été sensiblement proportionnelles aux vîtesses: mais, d'une part, les quantités observées, relatives aux grandes vîtesses, se seraient trouvées trop altérées; et, de l'autre, j'avais lieu de croire que plusieurs des expériences sur les petites vîtesses donnaient des erreurs absolues qui n'étaient pas en proportion avec ces vîtesses, quoiqu'elles ne fussent pas assez grandes pour faire rejeter les expériences. Il a donc fallu, tant pour remplir cette première condition autant que possible, et sans nuire à l'exactitude, que pour la rendre compatible avec la seconde, qui était au moins aussi importante, employer divers moyens par lesquels j'ai été conduit aux déterminations suivantes, qui, je crois, seront difficilement remplacées par de plus exactes, tant qu'on n'aura pas de nouvelles expériences.

J'ai eu, pour le mouvement de l'eau dans les tuyaux de conduite,

$$a = 0{,}000170; \quad b = 0{,}003416;$$

pour le mouvement de l'eau dans les canaux découverts,

$$a = 0{,}000436; \quad b = 0{,}003034.$$

Le coefficient b du carré de la vîtesse a une valeur peu différente de celles déduites de la première et de la deuxième méthode, mais approchant beaucoup plus de la valeur donnée par la deuxième; et si l'on examine les rapports entre les termes qui contiennent le carré de la vîtesse de l'eau dans les canaux découverts et dans les tuyaux, on verra que les trois évaluations s'accordent pour donner à ces rapports une valeur commune égale à 0,88 à-peu-près.

Les Tableaux de comparaison n.os 2, 3 et 5, présentent à vue les

différences entre les résultats calculés par mes formules et ceux déduits de l'expérience; voici un rapprochement de toutes les formules relatives à ces trois Tableaux, dans lesquelles entrent α et β, a et b:

Mouvement de l'eau dans les Tuyaux de conduite.

LAPLACE.. { *I.re Méthode.* $\frac{1}{4} gJD = 0,0001398\ U + 0,003633\ U^2.$
II.e Méthode. $\frac{1}{4} gJD = 0,0002031\ U + 0,003469\ U^2.$

PRONY. . . . . $\frac{1}{4} gJD = 0,0001700\ U + 0,003416\ U^2.$

La table suivante comprend des résultats calculés d'après ces formules, dans les limites de vîtesse qui embrassent les cas ordinaires de pratique :

VALEUR de U.	VALEURS DE $\frac{1}{4} gjD$. LAPLACE. 1.re Méthode.	2.e Méthode.	PRONY.
mètres.			
0,1.	0,000050.	0,000055.	0,000051.
0,5.	0,00098.	0,00097.	0,00094.
1,0.	0,0038.	0,0037.	0,0036.
2,0.	0,0148.	0,0143.	0,0140.
3,0.	0,0331.	0,0318.	0,0312.

Mouvement de l'eau dans les Canaux découverts.

LAPLACE.. { *I.re Méthode.* $gRI = 0,000353\ U + 0,003154\ U^2.$
II.e Méthode. $gRI = 0,000393\ U + 0,003069\ U^2.$

PRONY. . . . . $gRI = 0,000436\ U + 0,003034\ U^2.$

Je joindrai encore à ces dernières formules, une table calculée dans les mêmes limites de vîtesse que la précédente :

VALEUR de *U*.	VALEURS DE *gRI*.		
	LAPLACE.		PRONY.
	1.re Méthode.	2.e Méthode.	
mètres.			
0,1.	0,000067.	0,000070.	0,000074.
0,5.	0,00096.	0,00096.	0,00098.
1,0.	0,0035.	0,0035.	0,0035.
2,0.	0,0133.	0,0131.	0,0130.
3,0.	0,0294.	0,0288.	0,0286.

Rapport entre la vîtesse à la surface et la vîtesse moyenne.

Les nombres donnés par la formule que j'ai trouvée pour calculer la vîtesse moyenne par la vîtesse à la surface, et réciproquement, diffèrent si peu de ceux déduits de la première méthode, qu'on peut compter la différence pour rien ; voici le rapprochement des résultats numériques :

LAPLACE.. { *I.re Méthode.* $a = 2{,}32454$, $b = 3{,}09395$.
II.e Méthode. $a = 7{,}21147$, $b = 9{,}12016$.

PRONY............ $a = 2{,}37187$, $b = 3{,}15312$.

VALEUR de *V*.	VALEURS DE $\frac{v\,(v + a)}{v + b} = u$.		
	LAPLACE.		PRONY.
	1.re Méthode.	2.e Méthode.	
0,1.	0,76.	0,79.	0,76.
0,5.	0,39.	0,40.	0,39.
1,0.	0,82.	0,81.	0,81.
2,0.	1,70.	1,66.	1,70.
3,0.	2,62.	2,58.	2,62.

Les valeurs des termes qui se correspondent dans les 2.e et 4.e colonnes, sont, ainsi que je l'ai annoncé, sensiblement égales; et l'on peut s'assurer par le 5.e Tableau de comparaison, que ces valeurs, et par conséquent la formule qui les donne, représentent les observations avec toute l'exactitude que ces observations pouvaient faire espérer.

J'ai remarqué, dans mon Traité, que le facteur $\frac{V+a}{V+b}$ de la valeur de $U = \frac{V(V+a)}{V+b}$ avait, entre les limites des vîtesses ordinaires des rivières, une valeur qui s'écartait peu de 0,8, en sorte que les valeurs déduites de l'équation précédente ne s'écartent pas beaucoup de celles qu'on obtiendrait en faisant $U = \frac{4}{5} V$; ce qui fournit un résultat très-commode et suffisamment exact pour la presque totalité des cas de pratique.

Au reste, il est évident, à l'inspection des résultats numériques consignés dans les trois petits tableaux précédens, que les praticiens pourraient employer indistinctement l'une quelconque des trois formules d'après lesquelles ces tableaux sont calculés, sans craindre de commettre aucune erreur qui pût tirer à conséquence. Je crois avoir convaincu le lecteur, par les détails dans lesquels je viens d'entrer, que j'ai tiré tout le parti possible des expériences existantes, et, ce qui ne lui paraîtra pas la partie la moins utile de mon travail, que j'ai donné des méthodes qu'on pourra appliquer avec beaucoup d'avantage aux expériences futures.

RECHERCHES

PREMIER

DONNANT LA SIGNIFICANALYSE.

Mouvement d'un Système denent.

L'ARC *Aa*, planche 1, *fig. 1 et 2*, commençant au point fixe *A*. . . . . $= s'$

L'arc *a α*, commençant à l'origine mobile *a* du système du corps en mouvement dans le canal *ABCD*. . . . . $= s$.

L'arc *a α d* embrassant l'étendue entière de ce système. . . . . $= \lambda$.

Nota. Cet arc *a α d* peut être regardé comme semblable et égal à l'arc ou *directrice* $e\,\mu'\,\mu\,\mu''\,f$ passant par les centres de gravité de toutes les sections transversales du système *a b c d*.

Projection faite sur un plan horizontal
- de l'arc *A a*. . . . . $= \sigma'$.
- de l'arc *a α*. . . . . $= \sigma$.
- de l'arc *a α d*. . . . . $= \xi$.

Ordonnée ayant son origine dans le plan fixe horizontal qui passe par le point *A*, $P\,\mu'$. . . . . $= \zeta'$.

Ordonnées ayant leurs origines dans le plan mobile horizontal qui passe par le premier point matériel du système.
- $Q\,\mu$. $= \zeta$.
- $R\,\mu''$. . . . . $= \zeta$.

Masse depuis *a b* jusqu'en *α C*. . . . . $= m$.

Masse depuis *a b* jusqu'en *c d*, ou masse entière du système. . . $= M$.

Masse d'un des points matériels dont *m* est composé. . . . . . . $= \delta\, m$.

Aire de la section de $\delta\, m$, faite par un plan normal à l'axe ou *directrice* du canal. . . . . $= \omega$.

Nota. La réunion des élémens $\delta\, m$ du corps *m* forme un solide composé, dont chaque élément de masse $\delta\, m$ peut être considéré comme un petit prisme ayant une base ω, variable dans l'étendue du système, et une hauteur $\delta\, s$; ce qui donne. . . $\delta\, m = \omega\, \delta\, s$.

De plus, ces élémens $\delta\, m$ sont des solides distincts et séparables, qui se meuvent à la suite les uns des autres, se touchant

nt aux positions
prises pour une
tes de celles des
s, σ et ζ, qui
nt donné, d'un
, se désigneront
. . . . δ.

es relatives à la
σ ou ζ, on les
. . . . *S*.

ère du système,
. . . . Σ.

. . . . $= S(\omega\delta s)$.
. . . . $= \Sigma(\omega\delta s)$.

. . . . $= \psi$.
. . . . $= \Psi$.
. . . . $= k$.
. . . . $= K$.
. . . . $= n$.
. . . . $= N$.
. . . . $= \iota$.
. . . . $= E$.
. . . . $= a$.
. . . . $= A$.

Recherches physico-mathématiques, page 1.

RECHERCHES
PHYSICO-MATHÉMATIQUES
SUR
LA THÉORIE DES EAUX COURANTES.

§. I.er

Problèmes sur le mouvement d'un système de corps solides, analogues à ceux que présentent les Recherches sur le mouvement des eaux courantes.

1. Je me propose de traiter, dans cet écrit, plusieurs questions importantes qui tiennent aux parties les moins avancées de la science et de l'art de l'ingénieur; et les résultats de mes recherches offriront, je l'espère, de nouveaux exemples des secours qu'on peut tirer d'une théorie enrichie et vérifiée par l'observation, pour diriger et rectifier la pratique. Les preuves de ces résultats sont entièrement fondées sur les principes de l'hydraulique et de la physique expérimentale; mais, avant de passer aux développemens qu'elles exigent, je résoudrai quelques problèmes sur la mécanique des corps solides, qui, ayant leurs analogues parmi ceux relatifs aux corps fluides, fourniront des rapprochemens utiles, ajouteront à l'intérêt, et même à la clarté de l'exposition. Voici en quoi consistent ces problèmes.

2. Je suppose qu'un système de corps ou points matériels solides et pesans se meut dans une rainure, ou canal, de courbure quelconque, de manière qu'une section transversale prise où l'on voudra sur l'axe ou *directrice* du canal, et qui est traversée successivement par ces corps, n'en contienne jamais qu'un à-la-fois, et il

A

s'agit d'examiner les phénomènes résultant de l'action de la pesanteur combinée avec diverses résistances.

Les corps composant le système dont il s'agit, sont, ou des masses liées entre elles et formant une espèce de chaîne flexible, ou des masses séparées, sans aucune liaison ou adhérence les unes avec les autres.

3. Il faut, dans chacun de ces deux cas, examiner les forces motrices et accélératrices, tant imprimées qu'effectives; les vîtesses dues à l'action continue de ces forces; les tensions ou les pressions instantanées, aux différens points du système; la tendance à la discontinuité, ou la discontinuité réelle, qui peuvent en résulter; enfin différentes questions de *maxima* et de *minima* relatives aux phénomènes du mouvement.

§. II.

Équations qui donnent la force accélératrice et la tension ou la pression.

Fig. 1. 4. $A\,a\,d\,D$ est le profil longitudinal d'un canal infiniment étroit, à double ou à simple courbure, $\mu'\ \mu\ \mu''$ un système de points matériels pesans, liés ou non entre eux, assujettis à se mouvoir dans ce canal; μ' étant le premier, μ'' le dernier et μ l'un quelconque de ces corps. *(Voyez le Tableau de notation.)*

5. Je vais d'abord examiner quelles sont les forces qui tendent à accélérer ou à retarder le mouvement de la masse élémentaire $\mu = \delta m = \omega\,\delta s$. La première à considérer est la pesanteur qui imprime une force motrice $\frac{\delta z}{\delta s}\, g\,\omega\,\delta s$ ou $g\,\omega\,\delta z$, dans le sens $a\,a\,d$.

Cette force motrice est diminuée, 1.° par le frottement provenant de la pression normale $\frac{\delta \sigma}{\delta s}\, g\,\omega\,\delta s$, et qui a pour valeur $f g\,\omega\,\delta \sigma$;

2.° par le frottement provenant de la force centrifuge $\frac{u^2}{r} . \omega \delta s$ qui a pour valeur $f \omega u^2 \frac{\delta s}{r}$; 3.° par la différence des pressions que le corps éprouve à ses faces antérieure et postérieure, ou par $\delta \tau$.

La force motrice effectivement imprimée dans le sens de la courbe à l'élément de masse δm ou $\omega \delta s$, est donc

$$g \omega \delta z - f \omega \left(g \delta \sigma + \frac{u^2 \delta s}{r} \right) - \delta \tau ;$$

et en considérant δm comme animé d'une pareille force, on peut poser l'équation de son mouvement de la même manière que s'il était libre.

6. Mais pour donner aux résultats le plus de conformité possible avec l'état physique des choses, j'ajouterai aux forces retardatrices ci-dessus désignées, une force de même espèce qui pourra représenter la résistance due à *l'adhérence*, et que je supposerai en raison composée de la surface de contact $\chi \delta s$ et d'une fonction de la vîtesse désignée par $\Phi (u)$, la valeur absolue de cette force étant $\chi \delta s . \Phi (u)$.

7. Cela posé, la force motrice effective qui animera le corps, étant $\omega \delta s \frac{du}{dt}$, on a pour l'équation de son mouvement,

$$\omega \delta s \frac{du}{dt} = g \omega \delta z - f \omega \left(g \delta \sigma + \frac{u^2 \delta s}{r} \right) - \delta \tau - \chi \delta s \Phi (u),$$

de laquelle on déduit

$$\delta \tau = g \omega \delta z - \omega \delta s \frac{du}{dt} - f \omega \left(g \delta \sigma + \frac{u^2 \delta s}{r} \right) - \chi \delta s . \Phi (u).$$

8. L'intégrale de cette équation, par rapport à δ, donne, en observant que u et $\frac{du}{dt}$ doivent, dans cette intégrale, être traitées comme constantes,

$$\tau = g [S . (\omega \delta z) - f S (\omega \delta \sigma)] - \frac{du}{dt} S (\omega \delta s) - f u^2 S \left(\frac{\omega \delta s}{r} \right) - \varphi (u) S (\chi \delta s) + C.$$

9. On a, au point supérieur μ' du système, point auquel toutes les intégrales, par $\int$ et Σ, s'évanouissent,

$$\tau' = C,$$

et au point inférieur μ'', où les signes $\int$ se changent en Σ,

$$\tau'' = g[\Sigma(\omega\delta z) - f\Sigma(\omega\delta\sigma)] - \frac{dn}{dt}\Sigma(\omega\delta s) - fu^2\Sigma\left(\frac{\omega\delta s}{r}\right) - \varphi(u)\Sigma(\chi\delta s) + C.$$

10. Les trois équations des articles 8 et 9 peuvent s'écrire ainsi :

$$\tau = g(k - f\psi) - \frac{du}{dt}m - fu^2 n - a\,\Phi(u) + C;$$

$$\tau'' = g(K - f\Psi) - \frac{du}{dt}M - fu^2 N - A\,\Phi(u) + C;$$

$$\tau' = C.$$

11. Les deux dernières équations donnent,

$$M\frac{du}{dt} = \tau' - \tau'' + gK - f(g\Psi + u^2 N) - A\,\Phi(u).$$

12. Mettant τ' au lieu de C dans les deux premières, entre lesquelles on éliminera ensuite $\frac{du}{dt}$, on aura :

$$M\tau = (M - m)\tau' + m\tau'' + g(Mk - mK) - fg(M\psi - m\Psi) - fu^2(Mn - mN). \\ - (Ma - mA)\varphi(u).$$

13. Si on fait $\frac{m}{M} = \zeta$, cette équation prendra la forme

$$\tau = (1 - \zeta)\tau' + \zeta\tau'' + g(k - \zeta K) - fg(\psi - \zeta\Psi) - fu^2(n - \zeta N). \\ - (a - \zeta A)\varphi(u).$$

14. Ce sont les équations fondamentales, au moyen desquelles on peut résoudre toutes les questions relatives au mouvement du système et à la pression qui a lieu entre ses diverses parties. On voit que ces équations se déduisent très-facilement de celle de l'art. 7, qui est donnée elle-même par une considération fort simple.

Le deuxième membre de l'équation de l'article 11 est la différence entre la somme des forces motrices qui tendent à accélérer, et celle des forces qui tendent à retarder le mouvement de la

masse entière M dans le sens de la courbe ; cette *différence* est, en langage analytique, la somme des *forces motrices imprimées.*

15. On s'assurera aussi, avec quelque attention, que le deuxième membre de l'équation de l'article 13 est la différence entre la somme des forces motrices imprimées et celle des forces motrices qui ont lieu, soit dans la partie du système comprise depuis la première molécule μ' jusqu'à la molécule μ qui éprouve la pression τ, soit dans la partie comprise depuis μ jusqu'en μ'' ; c'est en effet la quantité totale de force motrice perdue dans la partie $ab\zeta\alpha$ (c'est-à-dire, par la masse m), ou la quantité, qui lui est égale, de force motrice gagnée dans la partie $\alpha\zeta cd$ (c'est-à-dire, par la masse $M - m$), qui donne la mesure exacte de la pression qui a lieu à la jonction $\alpha\zeta$ de ces deux parties de la masse totale.

Il est bien entendu que les directions de ces forces motrices et de ces pressions sont prises dans le sens de la courbe.

16. Si on suppose ω et χ constans, et m proportionnel à s, l'équation de l'article 11 deviendra :

$$\lambda . \frac{du}{dt} = \frac{\tau' - \tau''}{\omega} + g(\zeta - f\xi) - fEu^2 - \frac{\lambda\chi}{\omega}\Phi(u).$$

17. La même hypothèse introduite dans l'équation de l'art. 12, en fait disparaître $\Phi(u)$, et on a

$$\frac{\lambda\tau}{\omega} = \frac{(\lambda - s)\tau' + s\tau''}{\omega} + g(\lambda z - s\zeta) - fg(\lambda\sigma - s\xi) - fu^2(\lambda\varepsilon - sE).$$

18. Lorsque $AadD$ est une courbe plane, qu'on supposera sans points d'inflexion de A en D, ε et E ou $\int\left(\frac{\delta s}{r}\right)$ et $\Sigma\left(\frac{\delta s}{r}\right)$ sont susceptibles de constructions remarquables par leur simplicité. Si par les points a, α et d on mène des tangentes à la courbe $AadD$, qui se coupent respectivement en ε et E, on aura,

$$\varepsilon, \text{ ou } \int\left(\frac{\delta s}{r}\right) = \text{angle } \alpha\varepsilon T ; \; E, \text{ ou } \Sigma\left(\frac{\delta s}{r}\right) = \text{angle } dET.$$

§. III.

Évaluation de la vîtesse.

19. L'ÉVALUATION de la vîtesse peut se rapporter à deux hypothèses différentes.

Fig. 1. Dans la première hypothèse, le système entier dont *abcd* est la section longitudinale, descend le long de la courbe *AadD*, en supposant, si on veut, que le mouvement est tel qu'il n'y a pas solution de continuité dans ce système. Il est manifeste que, pour ce cas, les valeurs absolues des intégrales désignées par $\int$ et Σ, autres que m et M, varient à chaque instant avec la forme du corps *abcd*, forme qui dépend de la partie de la courbe *AadD*, sur laquelle les masses flexibles *abζα* et *abcd* se trouvent appliquées.

20. Voici une marche générale d'analyse pour cette hypothèse : la courbe *AadC* étant donnée, et ω devant être, ainsi que χ, une fonction connue de $s+s'$, on pourra ramener les expressions qui sont sous les signes $\int$ et Σ, à ne contenir que les indéterminées s' et s, leurs différentielles et des constantes. Intégrant par rapport à ces signes $\int$ et Σ (s', qui varie avec le temps, est constante dans ces intégrations), introduisant dans les intégrales par $\int$ la condition qu'elles s'évanouissent lorsque $s=0$; faisant dans les expressions intégrées par Σ, 1.° $s=0$, 2.° $s=\lambda$, et prenant ensuite la différence entre les résultats, afin d'avoir les intégrales définies dans l'étendue entière du système, les quantités A, K, Υ et N se trouveront être des fonctions de s' seule et de constantes. On a de plus $u=\frac{ds'}{dt}$, et l'équation de l'article 11 sera ainsi réduite à être une équation différentielle entre t et s'; cette équation donnera $t=F(s')$ (on désigne le signe de fonction par F), d'où $u=\frac{1}{F'(s')}$; tous les phénomènes de mouvement relatifs à la translation totale du système seront déterminés.

La valeur de u étant substituée dans l'équation de l'article 12, τ sera exprimé en fonction des deux variables indépendantes s' et s (les intégrales par $\mathcal{S}$ sont supposées évaluées de la manière ci-dessus expliquée) ; on pourra donc, ou avoir pour une position déterminée du système, la pression qui a lieu à chacun de ses points, ou connaître les pressions successives d'une molécule de ce système dans les diverses positions qu'il prend successivement.

Le problème est ainsi résolu généralement, et sous tous les points de vue, quant à la mécanique, c'est-à-dire, ramené à une affaire de pure analyse.

21. J'ai dit que l'équation de la courbe $AadD$ devait être donnée; mais lorsque l'action de la pesanteur n'est modifiée que par les pressions extrêmes et par le frottement résultant des poids des molécules, on arrive à une expression générale de la vîtesse qu'il est bon de donner ici.

Pour y parvenir de la manière la plus directe, je fais les différentielles ds' et δs des variables indépendantes s' et s, constantes et égales entre elles ; ce qui, d'après la théorie de ces espèces de variables, ne nuit en rien à la généralité des résultats. Ainsi, pendant chaque instant dt, le système entier parcourt, le long de la courbe $AadD$, le même espace ds' ou $u\,dt$ (la différentielle dt est alors variable), et la distance entre les deux joints ou articulations qui séparent une molécule quelconque μ de ses deux voisines, est aussi égale à ds'; la masse de cette molécule varie, dans l'étendue du système, avec ω seulement.

Conservant, dans l'équation 11, les termes relatifs aux pressions extrêmes et au frottement qui résulte des poids des molécules, on a

$$M\frac{du}{dt}=\tau'-\tau''+g\,\Sigma\left(\delta m\frac{\delta z}{\delta s}\right)-fg\,\Sigma\left(\delta m\frac{\delta r}{\delta s}\right).$$

Or, d'après ce qu'on vient de dire, 1.° $\delta s=ds'=u\,dt$; 2.° δz n'est autre chose que l'abaissement instantané de la molécule δm au-dessous de l'origine fixe des z', ce qui donne

$\delta z = d(z' + z)$; 3.° $\delta \sigma$ = la projection sur un plan horizontal du chemin instantané de δm, d'où $\delta \sigma = d(\sigma' + \sigma)$. Au moyen de ces valeurs, l'équation précédente se change en

$$Mudu = (\tau' - \tau'')ds' + g\Sigma[\delta m . d(z' + z)] - fg\Sigma[\delta m . d(\sigma' - \sigma)].$$

	Lorsque $t = 0$.	Au bout du temps t.
On peut intégrer par $\int$ sous le signe Σ; δm doit alors être considérée comme constante, et faisant la distance Aa mesurée le long de la courbe = . .	Q'	Q
La distance du corps μ, ou de l'élément de masse δm, au plan horizontal passant par le point A = ...	Z'	Z
La projection faite sur un plan horizontal, de la distance mesurée sur la courbe à laquelle l'élément δm se trouve, de l'origine fixe A = ...	X'	X
La vîtesse de translation du système le long de la courbe = ...	U	u

22. On aura, τ' et τ'' étant deux pressions constantes,

$$\tfrac{1}{2}Mu^2 = \tfrac{1}{2}MU^2 + (\tau' - \tau'')(Q - Q') + g\Sigma[\delta m(Z - Z')] - fg\Sigma[\delta m(X - X')].$$

23. Observons que $\Sigma\ \frac{[\delta m(Z - Z')]}{M}$ est la distance verticale entre les deux points de l'espace où se trouvait le centre de gravité de tout le système, au commencement du mouvement et au bout du temps t; en sorte que si l'on fait cette distance verticale $= h$, qu'on suppose $U^2 = 2gH$, et que de plus la gravité influe seule sur le mouvement du système, on aura

$$u^2 = 2g(H + h),$$

conformément à ce que donnerait le principe des forces vives.

Fig. 2. 24. Dans la seconde hypothèse à laquelle on peut rapporter l'évaluation de la vîtesse, on considère le système comme occupant constamment le même arc de courbe, ou ayant ses extrémités à des

des points fixes de cette courbe ; en conséquence il faut imaginer que lorsque le corps inférieur μ'' passe la limite dc, il s'anéantit, et que le corps supérieur μ' est sans cesse remplacé par un nouveau corps, arrivant au point abandonné par μ', avec la vîtesse qu'a le système au moment de son arrivée.

Si à ces conditions l'on voulait réunir celle de rendre l'état du système invariable, dans l'étendue entière de ce système, relativement aux rapports entre les masses des élémens successifs δm, il faudrait supposer à ces élémens de masse des modifications pendant leur mouvement, qui ne conviennent réellement qu'aux fluides : ainsi cette seconde hypothèse ne sera appliquée à une suite de points matériels solides, que pour le cas de ω constant, qui remplit naturellement la condition dont il s'agit, sans nécessiter aucun changement local dans les élémens de masse.

25. Rapportant l'équation de l'art. 16 à la fig. 2, qui convient au cas de $s'=0$, $z'=0$, $\sigma'=0$, les extrémités fixes du système étant en ab et cd, et les origines de λ, ζ et ξ respectivement placées dans le plan horizontal et dans la verticale passant par a, cette équation de l'article 16 donne *Fig. 2.*

$$dt = \frac{\lambda du}{\frac{\tau'-\tau''}{\omega} + g(\zeta - f\xi) - fEu^2 - \frac{\lambda\chi}{\omega}.\phi(u)};$$

équation dont l'intégrale sera toujours, ou immédiatement assignable, ou évaluable par les quadratures.

26. Supposons $\Phi(u) = \zeta u^2$ (ζ étant une constante), et faisons, pour abréger,

$$\frac{\tau'-\tau''}{\omega} + g(\zeta - f\xi) = A^2\left(fE + \frac{\zeta\lambda\chi}{\omega}\right),$$

l'équation prendra la forme

$$\frac{fE\omega + \zeta\lambda\chi}{\lambda\omega}dt = \frac{du}{A^2-u^2} = \left(\frac{du}{A-u} + \frac{du}{A+u}\right)\frac{1}{2A},$$

et la relation entre t et u sera

$$\frac{fE\omega + \zeta\lambda\chi}{\lambda\omega}t = \frac{1}{2A}\log.\left(\frac{A+u}{A-u}\right) + C.$$

27. Ou en déterminant la constante d'après la condition que la vitesse initiale est U,

$$\frac{fE\omega + \zeta\lambda\chi}{\lambda\omega}\, t = \frac{1}{2A} \log. \left[\frac{(A+u)\,(A-U)}{(A-u)\,(A+U)}\right].$$

28. Si on fait $\frac{2A(fE\omega+\zeta\lambda\chi)}{\lambda\omega} = \gamma$, le nombre dont le logarithme Népérien $= 1$ étant e, on déduit de cette équation,

$$u = A\,\frac{e^{\gamma t}(A+U)-(A-U)}{e^{\gamma t}(A+U)+(A-U)}.$$

29. On voit que A^2 est une limite dont la valeur de u^2 approche continuellement, à mesure que le temps augmente, et qu'elle n'atteint, à la rigueur, qu'au bout d'un temps infini. Mais il n'est pas difficile de reconnaître qu'après une courte durée du mouvement, u^2 différera très-peu de A^2, ou qu'on aura

$$u^2 = \frac{\tau' - \tau'' + g\omega(\zeta - f\xi)}{fE\omega + \zeta\lambda\chi};$$

c'est la même valeur qu'on trouverait en faisant $\frac{du}{dt} = 0$ dans l'équation de l'article 25.

30. Enfin, si le mouvement n'est dû qu'à l'action de la pesanteur et aux pressions extrêmes, l'équation de l'article 25 devient

$$\lambda\frac{du}{dt} = \frac{\tau' - \tau''}{\omega} + g\zeta;$$

le mouvement est uniformément accéléré; et, en supposant la vitesse initiale nulle, on a

$$\lambda u = \left(\frac{\tau - \tau''}{\omega} + g\zeta\right) t.$$

§. IV.

Examen particulier de la pression et de la tension.

31. Je vais m'occuper particulièrement de ce qui concerne la pression, dont l'examen fournira des résultats utiles pour la discussion de quelques points de théorie. Je prends l'état du système dans l'hypothèse de l'article 24. Il ne faut pas perdre de vue que c'est uniquement dans le sens de la courbe que s'exercent les pressions que j'ai désignées jusqu'à présent et que je continuerai à désigner par τ', τ et τ''. *(Voyez le Tableau de notation.)*

Soit Q la somme des forces motrices imprimées à la partie $ab\beta\alpha$ du système ou à la masse m, dans le sens de la courbe, Q' la somme des forces motrices qui animeront effectivement cette masse m; et supposons que toutes les molécules δm du système sont liées entre elles, de manière à former une chaîne éminemment flexible, et que nous supposerons incompressible et inextensible dans le sens de sa longueur. Fig. 2.

32. Il est manifeste, 1.° que si on a $Q > Q'$, la force motrice $Q - Q'$, perdue par $ab\beta\alpha$ et gagnée par $\alpha\beta cd$, sera la mesure exacte de la pression qui a lieu à l'articulation $\alpha\beta$, pression par laquelle le corps $ab\beta\alpha$, ou m, *pousse* le corps $\alpha\beta cd$, ou $M - m$, dans le sens $a\alpha d$; 2.° que si on a $Q < Q'$, la force motrice $Q' - Q$ ne sera gagnée par $ab\beta\alpha$ qu'autant qu'elle sera perdue par $\alpha\beta cd$, et que cette transmission de force motrice du corps $\alpha\beta cd$, ou $M - m$, au corps $ab\beta\alpha$, ou m, ne pourra avoir lieu qu'en vertu d'une *traction* exercée par $M - m$ sur m, à l'articulation $\alpha\beta$; et cette traction $Q' - Q$ n'est autre chose que la *tension* de la chaîne à la même articulation $\alpha\beta$.

33. Or on a, 1.° la somme des forces motrices imprimées à la partie $ab\beta\alpha$ du système ou à la masse m égale à

$$Q = \tau' + gk - gf\psi - fu^2 n - a.\Phi(u);$$

2.° la somme des forces motrices qui animent effectivement cette même masse m, est égale à la somme des forces motrices imprimées à tout le système, divisée par la masse entière du système (le quotient donne la force accélératrice commune $\frac{du}{dt}$) et multipliée par la masse m, c'est-à-dire, à

$$Q' = \frac{m}{M} [\tau' - \tau'' + gK - gf\Psi - fu^2 N - A.\Phi(u)].$$

34. Et on a

$$M(Q - Q') = (M - m)\tau' + m\tau'' + g(Mk - mK) - gf(M\psi - m\Psi) - fu^2(Mn - mN). \\ - (Ma - mA)\varphi(u);$$

ce qui est précisément la valeur de $M\tau$ donnée article 12, et offre une vérification de toute l'analyse contenue dans les trente premiers articles de ce Mémoire.

35. Ainsi, lorsque le deuxième membre de l'équation des art. 12 et 34 sera une quantité positive, l'action réciproque des parties m et $M - m$ du système sera une *pulsion* ou *pression*, dans le sens $a\alpha d$, de la partie supérieure m contre la partie inférieure $M - m$, exercée à l'articulation $\alpha\beta$; et lorsque ce même deuxième membre sera une quantité négative, cette *pulsion* ou *pression* se changera en une *traction* exercée, dans le même sens $a\alpha d$, par la partie inférieure $M - m$ sur la partie supérieure m, et qui opérera, à l'articulation $\alpha\beta$, une *tension* de la chaîne mesurant l'effort de $M - m$ sur m.

36. Si le deuxième membre de l'équation des articles 12 et 34 devient égal à zéro, il n'y aura aucune action réciproque des parties m et $M - m$ l'une sur l'autre, et par conséquent aucune *pulsion* ou *pression*, ni *traction* ou *tension* à l'articulation $\alpha\beta$.

§. V.

Examen des cas où il peut y avoir solution de continuité dans le système.

37. J'EXPOSERAI, dans ce paragraphe et dans le suivant, les principales conséquences de la théorie précédente.

Tous les corps du système étant supposés incompressibles si la valeur de τ (art. 12), ou de $Q - Q'$ (art. 34), est positive dans l'étendue entière de ce système, il y aura par-tout *juxta-position* ou *contiguité*, qui subsistera tant que la condition dont nous parlons sera remplie, soit dans le cas où les élémens δm de la masse sont liés les uns aux autres et forment une chaîne, soit dans le cas où ils n'ont aucune liaison entre eux.

38. Mais si τ ou $Q - Q'$ devient négatif à un point quelconque de la courbe $a\,\alpha\,d$, alors tous les élémens de masse δm étant supposés liés et former une chaîne, la chaîne éprouvera une *tension* à ce point, dont la valeur sera celle de $Q - Q'$; et si elle n'est pas assez forte pour résister à cette *tension*, elle se brisera et il y aura solution de continuité dans le système. Fig 2.

39. Dans la même hypothèse de $Q - Q'$ négatif, si les élémens de masse δm ne sont pas liés les uns aux autres, il y aura solution de continuité dans le système, quelque petite que soit la différence $Q' - Q$.

40. Pour rendre ces résultats sensibles par quelques exemples qui se rapportent aux applications pratiques dont cette théorie est susceptible, nous supposerons, sans rien statuer sur la nature de la courbe $a\,\alpha\,d$, 1.° que l'inclinaison des élémens de cette courbe varie toujours de la même manière d'un des points extrêmes à l'autre, c'est-à-dire, que la différentielle de l'angle formé par la tangente et par l'horizon ne change pas de signe, dans toute l'étendue de la courbe, et que de plus les variations de courbure

n'y sont pas très-rapides; 2.° que la différence de niveau af entre ses points extrêmes a et d est extrêmement petite, par rapport à la longueur de la courbe entière $a\,\alpha\,d$.

Dans cette hypothèse, les termes $gf\,(M\,\psi - m\,\Psi)$ et $fu^2\,(Mn - m\,N)$, dus au frottement, deviendront sensiblement négligeables, sans que pour cela on ait besoin de supposer le frottement nul, vu que la différence entre $\frac{\delta \sigma}{\delta s}$ et l'unité sera d'un ordre inférieur à $\frac{\delta z}{\delta s}$, et que le peu de courbure de $a\,\alpha\,d$ permettra de supposer $\frac{1}{r} = 0$.

La quantité qui doit être positive pour que la solution de continuité n'ait jamais lieu, se réduira à

$$(M - m)\,\tau' + m\,\tau'' + g\,(Mk - mK) - (M\mathrm{a} - mA)\,\Phi\,(u);$$

ce qui donne l'inégalité

$$M\,(gk + \tau') + m\,\tau'' > m\,(gK + \tau') + (M\mathrm{a} - mA)\,\Phi\,(u).$$

41. Et si les deux pressions extrêmes τ' et τ'' sont égales entre elles, la condition se réduira à

$$M\,(gk + \tau') > m\,g\,K + (M\mathrm{a} - mA)\,\Phi\,(u).$$

42. Les termes supposés négligeables dans l'hypothèse de l'article 40, le seront avec plus de raison encore, si on suppose ω et χ constans, et m proportionnel à s, hypothèse qui fait disparaître $\Phi\,(u)$; il sera visible, par rapport aux termes qui contiennent ε et E, z et ζ, que la différence entre les rapports $\frac{s}{\lambda}$ et $\frac{\varepsilon}{E}$ est négligeable par rapport à la différence entre $\frac{s}{\lambda}$ et $\frac{z}{\zeta}$; et, dans ce cas, le système n'éprouvera aucune solution de continuité, si on a par-tout $(\lambda - s)\,\omega\,\tau' + s\,\omega\,\tau'' + g\,\omega^2\,(\lambda z - s\zeta)$, égale à une quantité positive, ou l'inégalité

$$\lambda\,\omega\,(g\,\omega\,z + \tau') + s\,\omega\,\tau'' > s\,\omega\,(g\,\zeta\,\omega + \tau').$$

43. On peut mettre cette inégalité sous la forme,

$$\frac{\tau'}{g\omega} + z - \frac{s}{\lambda}\left(\frac{\tau'}{g\omega} + \zeta - \frac{\tau''}{g\omega}\right) > 0.$$

Le premier membre de cette inégalité est la valeur de $\frac{\tau}{g\omega}$, et tous les termes de ce membre sont d'une seule dimension.

44. Menons la ligne droite *a m d* entre les points extrêmes de la courbe sur laquelle le système se meut, et supposons cette courbe tracée dans le plan vertical *a f d* (cette hypothèse n'est que pour la simplicité de l'énonciation, et on appliquera aisément les résultats ci-après à une courbe à double courbure) : on aura, en supposant d'ailleurs que les conditions énoncées (art. 40) ont lieu, où une courbe *a μ d* présentant sa concavité à l'horizontale *a R*, qui passe par l'extrémité supérieure *a*, ou une courbe *a n d* présentant sa convexité à la même horizontale, ou enfin une ligne droite *a m d*. Fig. 3.

45. Or, dans le cas de la courbe *a μ d*, soit que les corps composant le système soient liés entre eux ou non, il y aura *continuité* dans l'un et l'autre cas, c'est-à-dire, juxta-position de l'un quelconque de ces corps avec celui qui le suit et celui qui le précède ; cette propriété résulte nécessairement de ce que l'ordonnée *Q μ* à la courbe étant par-tout plus grande que l'ordonnée *Q m* à la ligne droite, l'expression $\lambda z - s\zeta$ est positive dans l'étendue entière de la courbe ; ce qui rend impossible toute valeur négative de l'expression de l'article 42.

46. Dans la courbe *a n d*, au contraire, l'expression $\lambda z - s\zeta$ est négative d'une extrémité à l'autre de cette courbe ; et si la *continuité* du système a lieu indépendamment de toute liaison des corps de ce système entre eux, cette continuité ne peut être que le résultat des pressions extrêmes τ' et τ'', et il faut que ces pressions aient des valeurs telles que le terme $(\lambda - s)\tau' + s\tau''$ soit partout plus grand que $g\omega(s\zeta - \lambda z)$.

47. Cette dernière condition aura lieu à tous les points de la courbe *a n d*, si elle a lieu à celui où le sinus de l'angle formé par l'élément de cette courbe et par l'horizontale est égal à $\frac{1}{\lambda}\left(\frac{\tau'}{g\omega} + \zeta - \frac{\tau''}{g\omega}\right)$; c'est le point où la pression est un *minimum*.

48. Si la valeur de la pression, prise au point dont on vient de parler, est négative, alors il faudra, pour que la continuité subsiste dans toute l'étendue du système, que les points de ce système soient liés entre eux comme les chaînons ou anneaux d'une chaîne.

Je donnerai tout-à-l'heure (art. 55) un moyen aussi général que facile de déterminer les parties du système où la solution de continuité tend à avoir lieu.

49. Il est évident que si les pressions extrêmes sont nulles, la continuité, qui ne cessera pas d'avoir lieu dans la courbe *a μ d*, ne pourra, en aucune manière, se maintenir sur la courbe *a n d*, les points du système n'étant pas supposés liés entre eux, puisque l'expression $\lambda z - s\zeta$ y sera par-tout négative.

50. Enfin, si la directrice du canal est une ligne droite *a m d*, on aura, à tous ses points, $\lambda z - s\zeta = 0$; et ce cas offrira les propriétés suivantes :

1.° Quelles que soient les pressions extrêmes, si la *continuité* du système est une fois établie, c'est-à-dire, que tous ses élémens soient contigus de proche en proche, cette *continuité* ne cessera pas d'avoir lieu, en supposant néanmoins que les changemens brusques soient assujettis à la condition énoncée (art. 3).

2.° Si les pressions sont nulles aux extrémités du système (il s'agit des pressions constantes τ' et τ''), elles le seront aussi à un point quelconque de ce système, en sorte que tous les corps qui le composent se mouvront sans cesser d'être juxta-posés, et cependant sans se presser réciproquement.

3.° Si les pressions extrêmes sont égales entre elles, les pressions

de

de tous les points le seront aussi, c'est-à-dire que τ aura une valeur constante d'une extrémité à l'autre de la courbe.

4.° Enfin, quelles que soient les pressions extrêmes τ' et τ'', si on a $\tau' > \tau''$, la pression d'un point quelconque du système sera plus petite que τ', plus grande que τ''; l'inverse aura lieu si on a $\tau'' > \tau'$, et la pression variera uniformément d'une extrémité à l'autre du système.

51. On voit, par ce qui précède, que de toutes les directions qu'on peut donner à l'axe du canal, entre les points *a* et *d*, la ligne droite est la seule sur laquelle on puisse obtenir une pression ou nulle ou constante, dans toute l'étendue du système. *Fig. 3.*

§. VI.

Représentation graphique des résultats de l'analyse précédente relatifs à la pression.

52. POUR faciliter à un plus grand nombre de lecteurs l'intelligence de la théorie précédente, je vais donner ici un moyen graphique très-simple et très-commode d'en vérifier tous les résultats.

Soit l'horizontale *APB* d'une longueur *AB*, égale à celle de la directrice du canal, et la verticale *BC* égale à la différence de niveau entre les deux points extrêmes de cette directrice. Traçons une courbe *AMC* ou *AM'C*, telle qu'une ordonnée verticale quelconque *PM* ou *PM'* de cette courbe représente l'abaissement du point de la directrice correspondant à *P*, au-dessous du premier point *A* de cette directrice, le cas de la pente uniforme du canal donnant la ligne droite *ANC*. *Fig. 4. n.os 1 et 2.*

Représentons par les verticales *AD* et *CE*, respectivement, les pressions constantes τ' et τ'', qui ont lieu aux points extrêmes *A* et *B*, divisées par le produit constant $g\omega$ (la section transversale ω de l'un quelconque des corps du système est supposée constante); les quantités $\frac{\tau'}{g\omega}$ et $\frac{\tau''}{g\omega}$ expriment des lignes, puisque (la densité



étant = 1) τ' et τ'' sont les produits de la pesanteur g par des quantités de trois dimensions.

Traçons la ligne droite DE; si par un point quelconque P de la directrice du canal AB rectifiée on mène une verticale RPM, la partie de cette verticale, comprise entre le point R et la courbe tracée entre les points A et C, représentera la pression qui a lieu au point du système correspondant à P, et sera égale à cette pression, divisée par la quantité constante $g\omega$.

En effet, menant l'horizontale DF, et prolongeant les verticales CB et MR jusqu'en F et en Q, on a, P étant supposé l'extrémité de s ou le point du système qui éprouve la pression τ,

$$DF=\lambda,\ DQ=s,\ BC=\zeta,\ PM=z,\ AD=\frac{\tau'}{g\omega},\ CE=\frac{\tau''}{g\omega}.$$

Les triangles semblables DFE et DQR donnent,

$$QR=\frac{DQ}{DF}\times FE=\frac{s}{\lambda}\left(\frac{\tau'}{g\omega}+\zeta-\frac{\tau''}{g\omega}\right),$$

d'où $RM=QP+PM-QR=\frac{\tau'}{g\omega}+z-\frac{s}{\lambda}\left(\frac{\tau'}{g\omega}+\zeta-\frac{\tau''}{g\omega}\right)$;

ce qui est la valeur de $\frac{\tau}{g\omega}$, en introduisant dans l'équation de l'article 17 les conditions énoncées art. 40. Les z et les τ positifs se prennent au-dessous de AB et de DE, respectivement.

On peut remarquer que, dans les hypothèses de l'article 40, la courbe AMC, ou celle $AM'C$, pourra être regardée comme semblable et égale à la courbe *directrice* du canal, puisque, dans ces hypothèses, la différence entre la longueur AB de cette *directrice* et celle de sa projection sur un plan horizontal, est censée négligeable.

53. Rien de plus aisé maintenant que de retrouver dans cette construction toutes les propriétés énoncées depuis l'article 42. On voit que, les pressions extrêmes AD et CE agissant comme il est dit dans le *Tableau de notation*, c'est-à-dire, tendant à rapprocher les deux extrémités du système l'une de l'autre, la courbe $AM'C$ inférieure à la droite ANC sera toute entière d'un même côté, par

rapport à la droite DE, et qu'ainsi, lorsque le canal sera tracé au-dessous de la ligne de pente uniforme, la valeur de la pression sera positive dans toute son étendue, et le système dans une continuité permanente. *(Voyez l'art. 45.)*

54. Il n'en serait pas de même si, au lieu des pressions extrêmes, on avait des tractions qui tendissent à éloigner les points extrêmes l'un de l'autre, ou à alonger la chaîne; nous ne nous arrêterons pas à ce cas, que notre construction rend fort facile à examiner, en faisant attention que les points D et E devraient, s'il avait lieu, être placés au-dessous de la ligne ANC.

55. Dans le cas de la courbe supérieure AMC, qu'il faut décrire lorsque le tracé du canal est au-dessus de la ligne de pente uniforme, w étant le point où la tangente AMC est parallèle à DE, c'est-à-dire le point où on a $\frac{dz}{ds} = \frac{EF}{DF}$, si l'ordonnée rw est positive (n.° 1), toutes celles de la courbe AMC le seront; ce qui vérifie le contenu de l'article 47.

Si cette ordonnée rw est négative (n.° 2), il y aura solution de continuité dans le cas où les points du système ne seraient pas liés entre eux (art. 48); et dans le cas où ils le seraient, il y aura *pression* de A en n', de m' en B, et *tension* ou *traction* dans la partie $n'\,w'\,m'$: les points n' et m' n'éprouveront ni *pression* ni *tension*.

56. Ces vérifications, et en général toutes celles que la construction peut fournir, sont trop simples pour que je doive m'y arrêter. On se rendra aisément compte de ce qui résulte du cas où les pressions extrêmes sont nulles, cas auquel les lignes DE et AC se confondent. On verra, au premier coup-d'œil, que ce qu'elle donne pour la pente uniforme est exactement le contenu des articles 50 et 51, &c. &c.

§. VII.

Des maxima *et* minima *relatifs à la pression ; point du système qui offre des propriétés analogues à celles du* centre d'oscillation ; *de la* pression moyenne, *et des courbes sur lesquelles cette pression est un plus grand ou un moindre.*

57. Je terminerai ce que j'ai à dire sur le mouvement d'une suite de corpuscules solides et pesans, assujettis à glisser dans une rainure ou un canal curviligne, par quelques considérations sur les questions de *maxima* et de *minima* auxquelles l'examen de la pression donne lieu.

Je conserverai les hypothèses de l'article 40, afin d'avoir des résultats applicables aux objets de pratique que j'ai principalement en vue, et j'aurai la valeur suivante de la pression, qui, ainsi que je l'ai observé à l'article cité, est compatible avec l'existence du frottement dû tant à la pesanteur des corps qu'à la force centrifuge [je fais abstraction de la résistance proportionnelle à $\phi\,(u)$] :

$$M\tau = (M - m)\,\tau' + m\tau'' + g\,(Mk - mK),$$

qui peut se mettre sous la forme,

$$\frac{\tau}{g} = \frac{\tau'}{g} + k - \frac{m}{M}\left(\frac{\tau'}{g} + K - \frac{\tau''}{g}\right).$$

58. On a, au point du système où, à un instant déterminé, cette pression est un *maximum* ou un *minimum*,

$$\frac{\delta k}{\delta m} = \frac{1}{M}\left(\frac{\tau'}{g} + K - \frac{\tau''}{g}\right).$$

59. Le corps qui se trouve placé au point où cette équation a lieu, jouit d'une propriété qu'il est bon de remarquer, et qui consiste en ce que sa force accélératrice est la même que s'il était isolé du reste du système et placé tout seul au point de la courbe où il se trouve. En effet, la force accélératrice imprimée à une

molécule quelconque δm, et qui est le résultat de puissances et de résistances parmi lesquelles on ne comprend pas la pression qu'elle éprouve par l'action des autres corps, a pour valeur $g\frac{\delta z}{\delta s}$; et la force accélératrice qu'elle a réellement d'après l'action qu'exercent sur elle les autres molécules, est $\frac{gK+(\tau'-\tau'')}{M}$: or, s'il existe un corps dans le système dont l'accélération ne soit en aucune manière modifiée par l'action des autres masses, on aura, pour ce corps, égalité entre les forces accélératrices imprimées et effectives. Égalant donc les deux valeurs ci-dessus, et faisant attention que $\frac{\delta k}{\delta m}=\frac{\delta.S(\omega\delta z)}{\delta.S(\omega\delta s)}=\frac{\delta z}{\delta s}$, on a l'équation de l'article 58.

On peut parvenir à ce résultat d'une manière encore plus directe, plus simple et plus générale, en observant que le corps qui se meut comme s'il était isolé du reste du système, doit nécessairement éprouver, à ses faces antérieure et postérieure, des pressions qui se fassent équilibre, c'est-à-dire, des pressions égales. On a donc, pour ce corps, $\tau=\tau+\delta\tau$, ou $\delta\tau=0$; condition qui, introduite dans l'équation de l'article 57, donne celle de l'article 58 : mais il est évident que ce résultat, entièrement indépendant de toute forme particulière de la fonction τ, serait applicable à une valeur quelconque de la pression, autre que celle de l'article 57.

60. Cette espèce de *centre de pression* ou *d'action*, dont il est question dans l'article précédent, a des propriétés analogues à celles du *centre d'oscillation*, des corps pesans tournant autour d'axes horizontaux fixes. L'un et l'autre centre se meut comme s'il était isolé du système; de plus, le premier se trouve placé au point de passage de la partie de la masse où la force motrice imprimée est plus grande que l'effective, à la partie où l'effet contraire a lieu; et le deuxième sépare, sur la ligne perpendiculaire à l'axe de rotation et passant par le centre de gravité, les points de cette ligne qui oscillent plus

vîte, de ceux qui oscillent plus lentement qu'ils ne le feraient s'ils n'étaient pas liés à la masse.

61. En considérant la question de dynamique dont nous nous occupons, sous le point de vue le plus général, le *centre* dont on vient de parler varie, à chaque instant, de position dans le système; et l'on voit en effet (article 58) que la quantité $\frac{\delta k}{\delta m}$ dépend de K, qui a, pour chaque position du système, une valeur différente : mais, dans l'hypothèse de l'article 24, et en faisant δm constant, ce centre deviendra fixe sur la courbe le long de laquelle ce système est en mouvement.

On a, dans ce cas, pour la valeur de la pression,

$$\frac{\tau}{g\omega} = \frac{\tau'}{g\omega} + z - \frac{s}{\lambda}\left(\frac{\tau'}{g\omega} + \zeta - \frac{\tau''}{g\omega}\right);$$

Fig. 3. et l'inclinaison de la tangente, au point de la courbe $a\mu d$ ou $a n d$ correspondant au *maximum* ou au *minimum* soit de la *pression*, soit de la *tension*, se détermine par l'équation $\delta\tau = 0$, qui donne

$$\frac{dz}{ds} = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{\tau'}{g\omega} + \zeta - \frac{\tau''}{g\omega}\right).$$

Fig. 4, n.° 1. On voit que ce point est fixe sur la courbe, les *pressions* ou les *tensions* extrêmes τ' et τ'' étant supposées constantes; et il appartient sur la courbe $AM'D$ ou sur celle AMD, au point où la tangente est parallèle à l'axe DE, ainsi que cela doit être d'après la théorie des *maxima* et *minima*.

Fig. 3. 62. Lorsque les pressions extrêmes τ' et τ'' sont ou égales ou nulles, le point de plus grande pression se détermine par l'équation $\frac{dz}{ds} = \frac{\zeta}{\lambda}$, et ce point est celui où la tangente à la courbe $a\mu d$ est parallèle à la corde $a m d$. Si cette courbe $a\mu d$ est un arc de cercle, le point dont il s'agit la divise en deux parties égales.

Fig. 4, n.ºs 1 et 2. 63. Il faut maintenant distinguer le cas où l'équation $\delta\tau = 0$ donne un *maximum*, de celui où elle donne un *minimum*. Je supposerai

toujours que τ' et τ'' sont des *pressions*, c'est-à-dire, des forces qui tendent à rapprocher les extrémités du système l'une de l'autre ; et en conservant cette hypothèse, la seule qui convienne aux objets d'application que j'ai en vue, $\delta\tau = 0$ indiquera toujours un *maximum* de pression lorsque la courbe directrice du canal sera tracée au-dessous de la ligne de pente uniforme. La construction que j'ai donnée (art. 52), dispense d'avoir recours, pour s'en assurer, aux méthodes du calcul différentiel ; car on y voit clairement que l'ordonnée RM', menée au point où $\frac{dz}{ds} = \frac{FE}{DF}$ (équation qui revient à celle de l'article 61), est plus grande que toutes celles menées, de part et d'autre de ce point, de l'axe DE à la courbe $AM'C$.

64. Si la directrice du canal est tracée au-dessus de la ligne de pente uniforme, il arrivera ou que la courbe AMC (n.° 1) sera entièrement au-dessous de l'axe DE, ou (n.° 2) qu'elle sera coupée par cet axe. Dans le premier cas, l'équation $\delta\tau = 0$ indiquera un *minimum* de pression, ce qui est encore manifeste par la construction ; et dans le deuxième cas, si les corps du système sont liés entre eux et forment une chaîne, $\delta\tau = 0$ indiquera un *maximum* de tension. *Fig. 4; n.os 1 et 2.*

65. Ce deuxième cas, qui se rapporte à celui de la fin de l'article 55, donne, dans l'étendue de la directrice $An'm'B$ (n.° 2), une *pression* τ' en A qui diminue progressivement de A en n', où elle est zéro ; là commence une tension qui, nulle à ce point n', a son *maximum* en w', et redevient zéro en m', où elle se change en une pression dont la valeur augmente depuis m' où elle est nulle, jusqu'en B où elle est égale à τ''.

66. Ces distinctions entre les *maxima* et les *minima* deviennent bien plus importantes encore dans les questions où l'on se propose de déterminer d'avance la courbure de la directrice du canal, propre à remplir des conditions données. On sait que ces sortes de questions

se réduisent ordinairement à la recherche de lignes ou de surfaces courbes qui jouissent de certaines propriétés au degré le plus haut ou le plus bas, et appartiennent à la méthode appelée *des variations.*

Je pense qu'il sera utile d'en donner ici un exemple applicable à des objets de pratique, et je traiterai en conséquence le problème de la courbe de plus grande ou de plus petite *pression moyenne.*

Fig. 5, n.os 1 et 2. 67. Mais il faut d'abord se faire une idée précise de ce qu'on doit entendre par *pression moyenne.* Menons l'horizontale ab et la verticale bd (n.° 1), et soit $afgd$ une courbe plane située dans le plan vertical $abdc$, au-dessous de la ligne ad de pente uniforme, et que je suppose être la *directrice* d'un canal dans lequel se meut un système de corps, assujetti aux conditions énoncées (art. 16, 24 et 40); traçons, pour cette directrice, la courbe des pressions $AdeC$ (n.° 2), conformément à ce qui est dit (art. 52), τ' et τ'' étant les pressions extrêmes. La pression moyenne qui a lieu dans le sens de la courbe $afgd$, entre les corps qui se meuvent sur cette courbe, est représentée par une ligne qui aurait une longueur moyenne entre toutes les longueurs des ordonnées, comme Ro, menées de l'axe DE à la courbe $AdeC$, c'est-à-dire, est égale au produit de cette ligne moyenne par la quantité donnée $\frac{1}{g\omega}$, tout comme Ro et le produit, par la même quantité donnée, de la pression qui a lieu au point de la directrice $afgd$ correspondant à P. Or, pour avoir la ligne moyenne entre toutes les lignes Ro, il faut construire un parallélogramme $DH'K'E$ de même surface que l'aire $DAdeCED$, et la base DH' de ce parallélogramme sera la *ligne moyenne* cherchée.

68. On donne, par construction, $DH' \times AB = DAdeCED$, d'où $DH' = \frac{DAdeCED}{AB} = \frac{\Sigma(\tau\delta s)}{g\omega\Sigma(\delta s)}$, et l'on en conclut que la *pression moyenne* $= \frac{\Sigma(\tau\delta s)}{\Sigma(\delta s)}$.

69.

69. On a $\Sigma(\delta s) = \lambda$, et (article 61), $\tau = \tau' + g\omega\zeta - \frac{s}{\lambda}(\tau' + g\omega\zeta - \tau'')$; substituant ces valeurs dans $\frac{\Sigma(\tau\delta s)}{\Sigma\delta s}$, et prenant les intégrales, depuis $s = 0$ jusqu'à $s = \lambda$, des termes qui peuvent immédiatement s'intégrer, on a

$$\frac{\Sigma(\tau\delta s)}{\Sigma(\delta s)} = \tfrac{1}{2}(\tau' + \tau'') + g\omega\left(\frac{\Sigma(\zeta\delta s)}{\lambda} - \tfrac{1}{2}\zeta\right).$$

Désignant par a la distance du centre de gravité du système au plan horizontal passant par l'origine supérieure de ce système, on a

pression moyenne $= \frac{1}{2}(\tau' + \tau'') + g\omega(a - \frac{1}{2}\zeta)$.

70. On voit clairement, par cette valeur, la différence qu'il y a entre la pression moyenne dans toute l'étendue de la directrice, et la pression moyenne entre les deux pressions extrêmes : ces deux pressions sont égales lorsque la directrice a une pente uniforme ; mais la première est plus grande ou plus petite que la seconde, respectivement, selon que la directrice est tracée au-dessous ou au-dessus de la ligne de pente uniforme.

71. La *pression moyenne* étant ainsi définie et évaluée, proposons-nous de tracer la directrice du canal entre deux points fixes, de manière qu'elle ait une longueur donnée et une courbure telle, que la *pression moyenne* soit plus petite sur cette directrice que sur toute autre courbe de même longueur, tracée entre les mêmes points fixes.

Je vais faire voir qu'une même courbe donne, dans deux positions différentes, le *maximum* de *pression moyenne* et le *minimum* que nous voulons obtenir ; j'entrerai, pour être plus intelligible, dans des détails élémentaires, inutiles aux analystes exercés, mais que ceux à qui la méthode des variations est peu familière, ne trouveront pas déplacés.

Traçons au-dessus de la ligne *ad* de pente uniforme, une courbe *ag'f'd* (n.° 1), égale et semblable à *afgd*, mais placée dans une situation inverse, c'est-à-dire, telle, que la partie *ag'q'* Fig. 5. n.os 1 et 2.

corresponde à celle dgq, et la partie $q'f'd$ à celle qfa; il en résultera qu'en menant l'abscisse horizontale $d\pi = ap'$, on aura l'ordonnée verticale $\pi m = p'm'$, d'où $p'm' + pm = bd$.

Le système des corps posés sur $ag'f'd$ étant, en tout, égal et semblable à celui posé sur $afgd$, si $Ae'd'C$ est la courbe des pressions de la directrice $ag'f'd$, on aura entre cette courbe et celle $AdeC$, la même relation qui existe entre $af'g'd$ et $afgd$ (les pressions extrêmes proportionnelles à AD et CE sont communes aux deux courbes); c'est-à-dire qu'en menant CG parallèle à BA, une abscisse quelconque $C\Pi = AP'$ répondra à une ordonnée $\Pi o = P'o'$, ce qui résulte évidemment de la construction décrite (art. 52).

Les pressions moyennes qui ont lieu dans le sens des directrices $ag'f'd$ et $afgd$, entre les corps qui se meuvent sur ces courbes, seront, d'après ce qui est dit ci-dessus, représentées par DH et DH' respectivement, les parallélogrammes $DHKE$ et $DH'K'E$ étant égaux en surface aux aires $DAe'd'CED$ et $DAdeCED$; et les valeurs absolues de ces pressions moyennes seront égales aux produits de DH et de DH' par $g\omega$.

72. Qu'on imagine maintenant deux courbes $a\varphi\gamma d$ et $a\gamma'\varphi'd$ qui, étant semblables entre elles, et égales en longueur aux courbes $afgd$ et $ag'f'd$, soient, comme ces dernières, en situation inverse par rapport aux verticales ac et bd, et dont chacune ait une position infiniment peu différente de celle de la courbe qui la coupe; concevons de plus les courbes de pressions $A\delta\varepsilon C$ et $A\varepsilon'\delta'C$, respectivement correspondantes à $a\varphi\gamma d$ et $a\gamma'\varphi'd$; ces courbes $A\delta\varepsilon C$ et $A\varepsilon'\delta'C$ seront entre elles en même relation que tous les couples dont on vient de parler; et si l'on prend les différences, *aire* $DAdeCED$ — *aire* $DA\delta\varepsilon CED$, et *aire* $DAe'd'CED$ — *aire* $DA\varepsilon'\delta'CED$, ou les équivalentes $Cet\varepsilon C - Adt\delta A$ et $Ae't'\varepsilon'A - Cd't'\delta'C$, ces différences seront égales entre elles.

73. Or il y a une courbure assignable pour $dgfa$, qui rend

nulle la différence $Cc\iota\epsilon C - Ad\iota\delta A$, et la même courbure répétée en $ag'f'd$ anéantit la différence $A\epsilon'\iota'\epsilon'A - Cd'\iota'\delta'C$. L'équation $\partial.\Sigma(\tau\,\delta s) = 0$, qui, pour les courbes isopérimètres, équivaut à celle $\partial.\Sigma\left(\frac{\Sigma(\tau\,\delta s)}{\Sigma(\delta s)}\right) = 0$ (je prends ∂ pour signe de *variation*, parce que δ est déjà employé pour désigner le passage d'un point de la courbe à un autre point de la même courbe), résulte donc de deux positions contraires d'une même directrice, dont chacune comporte une valeur différente de la *pression moyenne* $\frac{\Sigma(\tau\,\delta s)}{\Sigma(\delta s)}$; et il suit de là, que l'une de ces positions, celle qui est inférieure à la ligne de pente uniforme, donne le *maximum*, et l'autre le *minimum* de *pression moyenne*, parmi toutes les courbes isopérimètres à la directrice.

74. Cette théorie et ces résultats vont s'éclaircir et se confirmer par la détermination de la courbe particulière qui donne la solution du problème dont je m'occupe. On voit (art. 69) que l'équation *Fig. 5, n.° 1.*
$\partial\left(\frac{\Sigma(\tau\,\delta s)}{\Sigma(\delta s)}\right) = 0$ se réduit à $\partial.\left(\frac{\Sigma(\zeta\,\delta s)}{\lambda}\right) = 0$; cette équation nous apprend que la courbe $afgd$ (dont le centre de gravité se confond avec celui du système lorsque ω est constant) doit être telle, que si, en conservant la même longueur, elle prend une position $a\phi\gamma d$ infiniment peu différente de celle $afgd$, et arbitraire d'ailleurs, la distance de son centre de gravité à l'horizontale ab ne changera pas. Or on sait, par la statique, que la courbe qui satisfait à cette condition est une *funiculaire*, et qu'elle y satisfait dans deux positions différentes, dont l'une a lieu lorsque la *funiculaire* est tracée au-dessous de la ligne droite, menée par ses extrémités fixes, et répond au *maximum* de *pression moyenne* (1);

(1) L'ingénieur *Girard*, en cherchant la courbe qu'il appelle *d'écoulement stable*, est parvenu à l'équation de la même funiculaire, qui donne le *maximum* de *pression moyenne* (Essai sur le mouvement des eaux courantes, *pag. 54 et suiv.*); et c'est la lecture de cette partie de son ouvrage qui m'a suggéré la pensée d'examiner la *pression moyenne*.

l'autre position de la directrice *funiculaire* est au-dessus de la ligne droite passant par ses points extrêmes, et répond au *minimum* de *pression moyenne.*

75. On suppose, dans la deuxième position, que les conditions énoncées (art. 46 et 47) ont lieu; ce qui revient à dire que la ligne DE ne coupe pas la courbe $Ae'd'C$. Le cas où l'intersection aurait lieu peut se traiter fort aisément par la théorie; mais je ne m'arrêterai pas à l'examiner, parce qu'il est hors des applications que j'ai en vue.

76. On voit que le calcul numérique est absolument le même pour la courbe de plus grande et pour celle de plus petite *pression moyenne;* quand on a formé une table des valeurs correspondantes
Fig. 5, n.° 1. de σ, z et s, on trace la seconde courbe en prenant l'origine de ces indéterminées, à l'extrémité a la plus élevée, et faisant $ap' = \sigma$, $p'm' = z$, $am' = s$; l'autre n'est que celle-ci placée dans une situation inverse, comme il est dit à l'art. 71.

Pour former la table des valeurs de σ, z et s, on cherchera d'abord la valeur d'une constante C par l'équation

$$\lambda^2 - 2C\zeta - \zeta^2 = 0;$$

on calculera ensuite, par les deux équations suivantes, une table dans laquelle on entrera par z pour avoir σ et s,

$$s = \sqrt{(2Cz + zz)};$$

$$\sigma = C \log. \left(\frac{C + z + \sqrt{(z^2 + 2Cz)}}{C}\right).$$

77. Mais il est préférable, à tous égards, d'entrer dans la table par les longueurs horizontales. L'ingénieur *Girard,* qui a donné, à la fin de son *Essai sur le mouvement des eaux courantes,* une table des coordonnées de la *funiculaire*, applicable à la longueur et à la pente totale du canal de l'Ourcq, a profité de l'égalité sensible qui existe entre la longueur de la *directrice* et sa projection sur un plan horizontal, qui lui a permis de supposer $\sigma = s$, et lui a donné ainsi la valeur de z en σ, dégagée de toute expression transcendante.

78. Voici un autre moyen extrêmement simple de calculer la *directrice* funiculaire, lorsque sa longueur sera très-grande par rapport à la différence de niveau entre ses points extrêmes ; ce cas est celui de presque toutes les applications pratiques qu'on pourrait faire de la théorie précédente.

Puisque s peut être regardé comme égal à σ, on a $\delta s = \delta\sigma$, et l'équation $\partial\left(\frac{\Sigma(z\delta s)}{\lambda}\right) = 0$ (art. 74) équivaut à $\partial\left(\frac{\Sigma(z\delta\sigma)}{\lambda}\right)$ ou à $\partial . \Sigma(z\delta\sigma) = 0$, et indique que la variation de l'aire renfermée entre l'horizontale ab, la verticale bd et la directrice, est égale à zéro. Or cette condition sera remplie par un arc de cercle, ayant pour longueur celle λ de la directrice, qui donnera le *maximum* d'aire et de *pression moyenne* dans la position inférieure $afgd$, et le *minimum* de l'une et de l'autre dans la position supérieure $ag'f'd$. Fig. 5, n.° 1.

De plus, ab étant supposé extrêmement grand par rapport à bd, le cercle dont il s'agit pourra être regardé comme tangent à ab au point a, dans le cas du *minimum*, et comme tangent à l'horizontale cd au point d, dans le cas du *maximum*.

79. Faisant $\rho = \frac{\xi^2 + \zeta^2}{2\zeta}$, l'équation de ce cercle sera $\sigma^2 = 2\rho z - z^2$; mais ayant égard à la petitesse de z par rapport au diamètre 2ρ, et à celle de ζ par rapport à ξ, cette équation se réduira à $\sigma^2 = \frac{\xi^2}{\zeta} z$, équivalente à $\sigma^2 = \frac{\lambda^2}{\zeta} z$, d'où

$$z = \frac{\zeta}{\lambda^2} \sigma^2,$$

équation à une parabole dont l'axe serait la verticale ac (dans le cas du *minimum* de *pression moyenne*), le sommet en a, et le paramètre $= \frac{\lambda^2}{\zeta}$, les indéterminées σ et s pouvant se prendre l'une pour l'autre.

80. Il est bon de s'assurer, par un exemple numérique, de la

grande exactitude de cette formule, dans des cas de pratique assez ordinaires ; je fais, comme au canal de l'Ourcq, ξ ou λ égal à 96000 mètres, $\zeta = 10^{m} \cdot 14$; et supposant σ successivement égal à 1, 2, 3 &c. myriamètres, j'ai la table suivante :

VALEURS de s ou σ.	VALEURS de z.	VALEURS de s ou σ.	VALEURS de z.
Mètres.	Mètres.	Mètres.	Mètres.
00000.	0,000000.	50000.	2,750651.
10000.	0,110026.	60000.	3,960937.
20000.	0,440104.	70000.	5,391276.
30000.	0,990234.	80000.	7,041667.
40000.	1,760417.	90000.	9,912109.

Les valeurs de z sont absolument identiques avec celles tirées de la table de l'ingénieur *Girard*, qui les a évaluées à la précision des millionièmes de mètre, et l'accord entre les deux manières de calculer subsisterait encore au-delà des six premières décimales.

§. VIII.

Des changemens que subissent les résultats de l'analyse précédente, lorsqu'on y introduit les propriétés caractéristiques qui distinguent les corps fluides des corps solides.

81. MON objet principal, en traitant du mouvement d'un système de corps pesans et solides, dans un canal ou rainure de courbure quelconque, était de comparer les résultats auxquels l'examen de ce mouvement conduit, avec ceux que fournissent les solutions des questions analogues, relatives aux fluides. Je m'astreindrai, en conséquence, dans les recherches qui vont suivre, à la même marche de raisonnement et d'analyse que j'ai suivie

DEUXIÈME

DONNANT LA SIGNIFICATNALYSE.

MOUVEMENT de l'eau dans les tuyaux de caragraphe VIII

UNE masse d'eau continue est supposée se mouvoir dans un tuyau ou un canal dont $a\alpha d$ (*fig. 2*) peut représenter la section longitudinale, de telle sorte qu'à mesure qu'elle s'écoule par la section transversale cd, elle se renouvelle à la section ab, et on ne considère le système fluide mobile que dans une partie déterminée $abcd$ du tuyau ou du lit.

Longueur indéterminée $a\alpha$ d'une partie du tuyau ou du lit. . . . . $= s$.

Longueur $a\alpha d$ de la partie entière dans laquelle on considère le mouvement. . . . . $= \lambda$.

Différence de niveau entre le centre de gravité de la tranche placée en $\alpha\beta$ et celui de la première tranche placée en ab. . . . . $= z$.

Différence de niveau entre les deux tranches extrêmes placées en ab et cd. . . . . $= \zeta$.

Aires des sections transversales de la masse fluide,
- en ab. . . . . $= O$.
- en $\alpha\beta$. . . . . $= \omega$.
- en cd. . . . . $= \Omega$.

Longueur de la partie du périmètre de la section trans fluide cesse ferm . . . . $= \iota$.

P . . . . $= j$.
port

des un canal . . . $= Q$.

N, δ, $\int$, S et Σ dérélier Tableau d'un avec) . . . . $= \gamma$.

V
V) . . . . $= \Gamma$.

P . . . . $= \theta$.
verts

D. . . . . $= \Theta$.

R . . . . $= a$.

Si . . . . $= A$.
adhé

Sine, les significations de observera que dans les direc et ϱ ont une signification unifcessus.

Recherches physico-mathématiques, page 31.

dans les recherches précédentes, afin que l'identité des méthodes rende plus sensibles les modifications introduites dans les solutions des problèmes par les propriétés caractéristiques qui distinguent l'état *fluide* de l'état *solide.* On verra que les formules qui donnent tant la *pression* que la *vîtesse* du *fluide,* sont, en général, différentes de celles qui se rapportent au système de corpuscules *solides,* avec lesquelles elles ne coïncident que dans des cas particuliers. Ces rapprochemens, et les recherches importantes dont ils seront suivis, peuvent intéresser non-seulement ceux qui visent aux applications pratiques, mais encore ceux qui n'envisagent l'objet de cet écrit que sous le point de vue de la physique et de la mécanique rationnelle.

82. Je commence par la *pression* que j'ai introduite, dès l'abord, dans mon analyse, afin d'en rendre les conséquences et les applications aussi lumineuses et aussi complètes que le sujet pouvait le permettre. Lorsqu'il s'agit d'un système de corpuscules *solides,* il faut, au point où l'élément de masse δm se trouve placé à un instant quelconque, distinguer deux pressions : la première, qui s'exerce normalement à la courbe parcourue, et qui résulte de la force centrifuge et de la pesanteur particulière de la masse δm, a pour valeur $\delta m \left(g \frac{\delta \sigma}{\delta s} + \frac{u^2}{r}\right)$ (on suppose qu'il n'existe aucun frottement sur les sections transversales ω); la seconde pression s'exerce dans le sens de la courbe, sur la section transversale ω, et résulte de la force motrice perdue ou gagnée respectivement par la masse m ou par celle $M - m$, masses qui, placées de part et d'autre de la section ω, se touchent et se pressent sur cette section. La valeur générale de la deuxième pression, dont il s'agit ici, a été donnée (art. 12).

Or le caractère qui distingue essentiellement, quant à la pression, la *solidité* de la *fluidité,* consiste en ce que, dans les *solides,* il y a *indépendance* entre les deux pressions dont on vient de parler; en sorte

que l'élément de masse δm, ou $\omega \delta s$, étant supposé un cylindre solide dont l'axe et la base ω sont, respectivement, parallèle et perpendiculaire à la tangente menée par l'élément δs de la directrice, sur lequel δm est posé, la pression τ qui agit dans le sens parallèle à δs ou à l'axe du cylindre, n'influe en rien sur la pression de cet élément δs.

Les phénomènes seront tout autres si vous rendez fluide la molécule δm, en la supposant d'ailleurs renfermée dans un tuyau dont le système fluide occupe toute la capacité intérieure : dès-lors la pression τ, dans le sens de l'axe de cette molécule, se reproduira sur la directrice ou sur la paroi qui renferme le fluide ; et si la section ω est petite, τ pourra être regardé comme la valeur entière de la pression qui s'exerce sur la paroi, ou perpendiculairement à la directrice.

83. Il est évident que l'évaluation des forces qui tendent à changer la forme de la paroi ou à la corroder, n'est pas la même dans l'un ou l'autre de ces deux cas ; je fais abstraction de l'effet corrosif qui pourrait résulter de la nature particulière du corps en mouvement dans le canal, pour ne considérer cet effet que relativement à la pression.

84. Je passe maintenant aux différences entre les systèmes *solide* et *fluide* relatives à la *vîtesse.* Dans le système *solide*, à un instant déterminé tous les points de la masse ont la même vîtesse dans le sens de la directrice (on suppose que les conditions relatives à la *continuité* ou à la *contiguité* des molécules sont remplies), en sorte que soit la quantité, soit le volume de *matière* qui, pendant l'instant dt, passe par une section transversale quelconque du canal, n'est, en général, égal ni à la quantité ni au volume de *matière* qui passe par une autre section ; et les rapports entre ces quantités et ces volumes dépendent des points du système auxquels correspondent les sections.

L'égalité

L'égalité entre les volumes de *matière* qui passent, pendant le même temps, par deux sections différentes, doit avoir lieu rigoureusement dans le cas d'un *fluide incompressible,* dès qu'on y suppose la *continuité* permanente du système; et si le fluide est homogène, l'égalité de volume donnera celle de quantité ou de masse. On a vu que, pour le système *solide,* les conditions de la *continuité* dépendaient ou de la liaison des élémens de masse entre eux, ou, s'ils n'étaient pas liés, de certains rapports entre les forces motrices qui les animaient; ces rapports doivent aussi avoir lieu pour la masse fluide, mais ne sont compatibles avec l'égalité de vîtesse de toutes les tranches que dans le cas particulier où la section transversale ω est constante sur toute la longueur de la directrice.

85. Ainsi U étant la vîtesse particulière de la tranche qui correspond à la section Ω, faite à un point déterminé du système, et v la vîtesse de la tranche correspondante à une section quelconque ω, on a, dans le système *fluide,* l'équation $v\omega = U\Omega$, qui le distingue essentiellement du système solide, où cette équation n'a lieu que dans des cas particuliers.

86. Pour bien faire sentir les conséquences de ces distinctions, relativement aux équations qui donnent la *pression* et la *vîtesse,* je vais d'abord donner ces équations, sans avoir égard aux circonstances physiques que j'introduirai ensuite dans l'analyse (en conservant toujours l'hypothèse de l'article 24), et faciliter, par des comparaisons d'objets simplifiés, celles que nous aurons à faire quand nous introduirons dans l'analyse les forces retardatrices dont l'observation a constaté l'existence.

La force motrice imprimée par la pesanteur à une tranche quelconque, dans le sens de la courbe, a pour valeur $g\,\delta m \,.\, \frac{\delta z}{\delta s}$ ou $g\,\omega\,\delta z$. Cette force se combine avec celle due à la pression qui, dans le système *solide,* $= -\delta\pi$; en sorte qu'on a pour ce système,

$$\omega\,\delta s \,.\, \frac{du}{dt} = g\,\omega\,\delta z - \delta\pi\,;$$

d'où

$$\tau = g\,k - m\,\frac{du}{dt} + C,$$

$$\tau'' = g\,K - M\,\frac{du}{dt} + C,$$

$$\tau' = C.$$

87. On déduit de ces équations,

1.° $M\,\tau = g\,(M\,k - m\,K) + (M - m)\,\tau' + m\,\tau''$;

2.° $M\,\frac{du}{dt} = g\,K + \tau' - \tau''$;

valeurs qui se déduisent comme conséquence de celles données (art. 11 et 12).

88. Supposons maintenant le système *fluide* : il y a une première attention à avoir relativement à la force retardatrice provenant de la pression. La section ou face ω de l'élément δm éprouve une pression $= p\,\omega$; la face opposée $\omega + \delta\omega$ éprouve une pression $= (p + \delta p)\;(\omega + \delta\omega)$: mais on se tromperait si, comme dans le système *solide*, on prenait pour force retardatrice la différence absolue $p\,\delta\omega + \omega\,\delta p$ entre les deux pressions contraires; il faut observer que, d'après la propriété fondamentale qui caractérise la *fluidité* et la distingue de l'*état solide*, les deux pressions $p\,\omega$ et $p\,(\omega + \delta\omega)$, qui sont normales et proportionnelles aux surfaces sur lesquelles elles agissent, se font réciproquement équilibre, et, par conséquent, n'influent en rien sur la variation de la vîtesse de la tranche fluide, qui n'est retardée que par la pression $\omega\,\delta p$.

Ainsi la force motrice imprimée $= g\,\delta m\,\frac{\delta z}{\delta s} - \omega\,\delta p$ ou $g\,\omega\,\delta z - \omega\,\delta p$, et l'équation du mouvement de la tranche δm est $\omega\,\delta s\,\frac{dv}{dt} = g\,\omega\,\delta z - \omega\,\delta p$, d'où l'on déduit

$$\delta p = g\,\delta z - \frac{dv}{dt}\,\delta s.$$

89. La valeur de δp est de même forme que celle $g\delta z - \frac{du}{dt}\delta s$, de $\frac{\delta \tau}{\omega}$, et cependant ces deux valeurs sont bien loin d'être identiques ; car $\frac{du}{dt}$, dans la première, est une quantité commune à tous élémens du système, au lieu que $\frac{dv}{dt}$, dans la seconde, est une force accélératrice, qui, à l'instant où l'on considère le mouvement, ne peut, en général, convenir qu'à un seul point du système, celui qui est à l'extrémité de l'arc s, où la pression p a lieu, et qui change d'un point à l'autre.

90. On ne peut donc pas intégrer immédiatement l'équation qui donne la valeur de δp (art. 88), ainsi qu'on a fait pour celle qui donnait la valeur de $\delta \tau$ (art. 86) ; et il faut d'abord faire subir une transformation au terme qui contient $\frac{dv}{dt}$, au moyen de l'équation *caractéristique* $\omega v = \Omega U$: cette équation donne $v = \frac{U}{\omega}\Omega$. Différenciant par d, et observant, 1.° que U affecté à une section déterminée de la masse, et par conséquent invariable par rapport au *lieu* ou à δ, varie par d, c'est-à-dire, avec le temps ; 2.° que ω qui ne varie que par δ, quand on considère, à un même instant, deux tranches contiguës, varie par d quand il s'agit de deux positions d'une même tranche dans deux instans consécutifs, et qu'alors $d\omega$ est alors la variation instantanée que subit la base du prisme élémentaire δm; on a l'équation

$$\frac{dv}{dt}\delta s = \Omega \frac{dU}{dt} . \frac{\delta s}{\omega} - \Omega U . \frac{d\omega}{\omega^2} . \frac{\delta s}{dt}.$$

Le deuxième terme du deuxième membre peut se mettre sous la forme $\Omega U . \frac{\omega d\omega . \delta s}{\omega^3 . dt}$, et l'équation de l'article 88 devient, en y substituant la valeur de $\frac{dv}{dt}\delta s$,

91. $\delta p = g\delta z - \Omega\frac{dU}{dt}\cdot\frac{\delta s}{\omega} + \Omega U\cdot\frac{\omega d\omega.\delta s}{\omega^3 dt}$;

92. Avant de prendre l'intégrale de chaque membre dans l'étendue de la masse, ou d'intégrer par rapport à δ, il est convenable de faire le choix d'une différentielle constante, et je prends pour telle la différentielle de masse $\omega\delta s$, que je fais égale à la quantité de fluide $\Omega U dt$ qui s'écoule par l'orifice Ω pendant l'instant dt auquel se rapporte la valeur de l'intégrale définie que je veux avoir.

Au moyen de l'équation hypothétique $\Omega U dt = \omega\delta s$ qui rend la différentielle $d\omega$ identique avec celle $\delta\omega$, la valeur de δp se change en

93. $\delta p = g\delta z - \Omega\frac{dU}{dt}\cdot\frac{\delta s}{\omega} + \Omega^2 U^2\cdot\frac{d\omega}{\omega^3}$,

94. qui, intégrée par rapport à δ, donne

$$p = gz - \Omega\frac{dU}{dt}\gamma - \frac{\Omega^2 U^2}{2\omega^2} + C;$$

95. et en se transportant aux deux limites extrêmes, on a

$$\Pi = g\zeta - \Omega\frac{dU}{dt}\Gamma - \tfrac{1}{2}U^2 + C,$$

$$P = -\tfrac{1}{2}\frac{\Omega^2}{O^2}U^2 + C.$$

96. On déduit des trois équations précédentes,

1.° $\Gamma p = g(\Gamma z - \gamma\zeta) + (\Gamma - \gamma)P + \gamma\Pi + \tfrac{1}{2}U^2[\Gamma\theta - (\Gamma - \gamma)\Theta]$;

2.° $\Gamma\Omega\frac{dU}{dt} + \tfrac{1}{2}\Theta U^2 - g\zeta - (P - \Pi) = 0$.

97. La composition de ces équations offre une suite de termes correspondans à ceux des équations des articles 11 et 12, qui sont indépendans du frottement et de l'adhérence ; mais elles contiennent de plus le terme où se trouve le carré U^2 de la vîtesse à la section Ω, qui n'a point d'analogue dans les équations des articles cités ; ce qui établit une différence notable, même dans la forme générale des équations. De plus, ces termes qui composent, dans les unes et les autres, des groupes de même forme, ne sont rien moins qu'identiques, et il

suffit de citer ceux renfermant la force accélératrice, qui, dans les équations de l'article 11, est une constante pour l'étendue entière du système, au lieu que dans celles de l'article 96 elle est, ainsi que la vîtesse, affectée à un point déterminé de la directrice.

98. Mais dans le cas particulier où la section transversale ω est constante d'une extrémité à l'autre de la directrice, et la masse variable m proportionnelle à la longueur s, on a $\theta=0$, $\Theta=0$; le carré U^2 disparaît des équations de l'article 96, qui deviennent

$$\lambda p=g(\lambda z-s\zeta)+(\lambda-s)P+s\Pi,$$

$$\lambda\frac{dU}{dt}=g\zeta+(P-\Pi);$$

et celles des articles 11 et 12 se changent en

$$\lambda\,.\,\frac{\tau}{\omega}=g(\lambda z-s\zeta)+(\lambda-s)\frac{\tau'}{\omega}+S\frac{\tau''}{\omega},$$

$$\lambda\,.\,\frac{du}{dt}=g\zeta+\frac{\tau'-\tau''}{\omega}.$$

99. L'identité est complète si l'on ne considère la pression que dans le sens de la courbe, ou perpendiculairement au plan normal à la directrice; sous ce point de vue, $p\omega$ et τ, $P\omega$ et τ', $\Pi\omega$ et τ'' sont indistinctement les pressions absolues sur les sections transversales placées aux points où ces pressions ont lieu, p et $\frac{\tau}{\omega}$, P et $\frac{\tau'}{\omega}$, Π et $\frac{\tau''}{\omega}$ étant ces mêmes pressions rapportées à l'unité de surface. Mais j'ai déjà observé (art. 82) que, dans le cas de la fluidité, les pressions p, P et Π, exercées sur les sections transversales correspondantes, se reproduisaient sur la paroi du canal, et qu'il n'en était pas de même des pressions τ, τ' et τ'' qui ont lieu dans le système des corps solides.

100. On peut ajouter à ces observations, que la forme du système composé de corps solides est, quant aux sections transversales,

indépendante de celle du canal : cette circonstance empêche qu'on ne puisse considérer l'état du système comme permanent entre deux points fixes, dans toute autre hypothèse que celle de ω constant (art. 24), à moins qu'on ne suppose que chaque élément de masse, en particulier, change de forme à mesure qu'il change de place, supposition à laquelle la nature du système ne fournit aucun fondement. Mais, dans le cas de la fluidité, la figure du corps en mouvement dépendant de celle du canal ou tuyau dans lequel il se meut, le changement de forme dont on vient de parler résulte de la nature même du système; et si, par quelque moyen, on obtient aux sections extrêmes les conditions énoncées (art. 24), celles relatives à la *continuité* étant aussi censées remplies, la permanence de l'état du système, quant à la figure, aura lieu d'elle-même entre ces extrémités supposées fixes, quelle que soit la loi de variation de ω, à moins que la paroi ne soit susceptible de corrosion. Je supposerai, dans toute la suite de ces recherches, que les extrémités du système sont fixes.

§. IX.

Récapitulation des principaux résultats de l'expérience qui peuvent être employés pour l'établissement des bases d'une théorie physico-mathématique du mouvement des fluides incompressibles et pesans.

101. On a vu (art. 98) que le mouvement d'un fluide dans un tuyau ou canal rectiligne incliné à l'horizon, doit continuellement s'accélérer, si l'on fait abstraction de certaines résistances qui, dans l'état physique des choses, doivent modifier ce mouvement. En considérant la question sous le point de vue plus général auquel se rapportent les équations de l'article 96, on trouve, à la vérité, des cas qui donnent le mouvement sensiblement uniforme; mais cette uniformité tient à des circonstances entièrement étrangères aux

résistances dont je viens de parler (*voyez* mon Architecture hydraulique, *art. 771*, et ma Mécanique philosophique, *art. 433)*, et qu'il s'agit maintenant de combiner avec les principes de l'hydraulique rationnelle, pour asseoir les bases d'une théorie physico-mathématique du mouvement des fluides incompressibles et pesans.

Je vais d'abord récapituler les principaux résultats de l'expérience qui peuvent fournir les données nécessaires à la solution du problème.

102. *Premier résultat.* Un fluide comme l'eau, ayant son écoulement par un tuyau ou canal d'une longueur suffisante pour qu'il puisse y établir son *régime*, éprouve des résistances qui peuvent et doivent être regardées comme des forces retardatrices dont les valeurs sont de même ordre que celle mesurant la force accélératrice due à la pesanteur; d'où il suit que ces forces peuvent non-seulement diminuer l'effet de la pesanteur, d'une quantité finie, mais encore l'anéantir et réduire le mouvement à l'uniformité.

103. *Deuxième résultat.* On pourrait d'abord être tenté de comparer ces résistances à celles introduites (art. 5) dans les équations du mouvement d'un système de corps solides, d'après les expériences d'*Amontons*, *Coulomb*, &c. sur l'effet du frottement, qu'ils ont reconnu être sensiblement proportionnel à la pression normale: mais il paraît, d'après d'autres expériences nombreuses et soignées de *Dubuat*, *Dobenheim* et *Benezech*, que, dans le cas de la fluidité, les résistances qui modifient l'effet de la pesanteur, sont, dans une section transversale quelconque, indépendantes des pressions des molécules comprises dans cette section; résultat bien différent de ceux obtenus sur le mouvement des corps solides glissant les uns sur les autres.

104. *Troisième résultat.* Dans une section transversale quelconque, les diverses molécules ont, perpendiculairement à cette section ou parallèlement à la directrice, des vîtesses différentes. Il y a un point de cette section où se trouve le *maximum* de vîtesse (dans un tuyau cylindrique, ce point est au centre de la section transversale circulaire;

dans un canal découvert, il est, en général, à la surface); et si l'on imagine une ligne droite menée de ce point à la paroi, dans le plan de la section, les vîtesses des molécules fluides correspondantes aux divers points de cette ligne diminuent progressivement depuis l'origine de la ligne (où est le *maximum* de vîtesse) jusqu'à la paroi.

105. *Quatrième résultat.* Ainsi, parmi tous les filets fluides qui traversent une même section, il y en a deux qui se meuvent avec une vîtesse plus grande et plus petite, respectivement, que tous les autres (dans les canaux découverts, l'une de ces vîtesses se nomme *vîtesse à la surface;* et l'autre, *vîtesse de fond*); et il en existe nécessairement un troisième, dont la vîtesse est telle, qu'en la multipliant par l'aire de la section transversale, on a le *produit* de cette section : cette troisième vîtesse se nomme *vîtesse moyenne ;* et il faut observer que chacune de ces vîtesses, quoique attribuée à un seul filet, peut cependant lui être commune avec la couche ou zone entière dont ce filet fait partie.

Les trois vîtesses dont on vient de parler, ont entre elles des relations que *Dubuat* s'est attaché à découvrir; et ses expériences l'ont conduit à cette conclusion remarquable, que les relations dont il s'agit sont indépendantes de la grandeur et de la forme du lit. J'aurais de la peine à croire qu'une pareille conclusion ne fût pas susceptible de recevoir quelques modifications par d'autres expériences qui pourront avoir lieu; mais celles de *Dubuat* n'en fournissent pas moins des règles de pratique fort utiles, comme je le ferai voir bientôt, en revenant avec détail sur cette matière.

106. *Cinquième résultat.* Lorsque le fluide coule dans un tuyau ou sur un lit susceptible d'être mouillé, une lame ou couche de fluide reste adhérente à la matière qui compose ce tuyau, ou dans laquelle ce lit est creusé; cette couche peut, ainsi, être regardée comme la véritable paroi qui renferme la masse fluide en mouvement.

107. *Sixième résultat.* Il semblerait, d'après les expériences de *Dubuat*,

Dubuat, que l'action attractive du tuyau ou du lit s'arrête à la couche fluide qui tapisse la paroi ou qui en tient lieu; cet habile observateur ayant cru reconnaître que la diversité des matières dans lesquelles l'écoulement avait lieu, ne faisait pas sensiblement varier la résistance. *(Voyez* ses Principes d'hydraulique, *art. 36.)*

108. *Septième résultat.* Les molécules de l'eau *adhèrent* les unes aux autres; en sorte que si l'on veut enlever une de ces molécules de la surface horizontale d'une masse stagnante, on aura à vaincre son poids, plus une résistance provenant de son *adhésion* ou *cohésion* avec les molécules voisines, qui tient à ce que les physiciens appellent la *viscosité,* et qui a été l'objet de l'examen de plusieurs observateurs.

Cette *adhésion* ou *cohésion* des molécules fluides entre elles, et celle des mêmes molécules à la matière dont le tuyau est formé ou dans laquelle le lit est creusé, doivent, en général, être représentées par des quantités de valeurs différentes, mais comparables ou de même ordre les unes par rapport aux autres.

109. On peut, d'après ces résultats immédiats de l'expérience, se faire une idée générale des forces accélératrices et retardatrices qui modifient l'action de la pesanteur. Prenons, pour plus de simplicité, le cas d'un tuyau cylindrique, et considérons la masse totale du fluide qu'il contient, comme divisée en deux parties : l'une centrale, de forme cylindrique, ayant pour axe l'axe du tuyau, et dont le rayon peut varier depuis zéro jusqu'à $\frac{1}{2} D$ (D est la longueur du diamètre du tuyau); l'autre masse étant comprise entre celle dont on vient de parler et la paroi : la vîtesse moyenne de la masse centrale est plus grande (art. 104) que celle de la masse qui l'enveloppe; ainsi, en vertu de la seule cohésion (art. 108), une action et une réaction réciproques doivent avoir lieu entre ces deux masses, dont la première tend à augmenter la vîtesse moyenne de la seconde, laquelle, par conséquent, produit l'effet contraire sur la première. Des considérations semblables sont applicables à un nombre indéfini

de couches ou enveloppes concentriques dont on peut imaginer que la masse fluide est composée. Chacune de ces couches tend à accélérer celle avec laquelle elle est en contact du côté de la paroi, et à retarder celle qui lui est contiguë du côté de l'axe ou du centre.

La résistance qui s'exerce à la surface de séparation de deux de ces couches, doit prendre une valeur particulière vers les *limites* du système, c'est-à-dire, vers les enveloppes concentriques qui avoisinent ou touchent la couche fluide immobile adhérente à la paroi; et il est essentiel d'observer que le mouvement ne parviendrait pas à l'uniformité sans les forces retardatrices qui ont lieu à cette *limite*. En effet, conservons la cohésion entre les molécules fluides, en supposant que la masse totale n'éprouve aucune résistance à la paroi; tout l'effet de la cohésion se réduira à une distribution particulière, entre tous les élémens de masse, de la somme des forces motrices imprimées par la pesanteur: mais comme il n'y aura aucune perte sur cette somme, la vîtesse moyenne et celle de chacune des enveloppes concentriques seront nécessairement variables.

D'une autre part, l'uniformité de mouvement tient aussi à la cohésion entre les molécules fluides, sur-tout s'il est vrai (art. 107) que l'action de la matière du lit sur le fluide ne s'étend qu'à une distance presque infiniment petite de la paroi; car, en admettant ce fait ou cette hypothèse de l'article 107, l'adhérence qui a lieu de proche en proche, depuis le filet central jusqu'à la couche immobile fixée à la paroi, est la seule cause assignable de la destruction des forces accélératrices imprimées par la pesanteur à la masse intérieure.

Les forces retardatrices qui ont lieu à la couche fluide adhérente à la paroi, et sans lesquelles l'uniformité du mouvement ne pourrait pas s'établir, se composent et de celles dues à la cohésion des molécules fluides entre elles, et d'autres forces particulières à la *limite* du système; de plus, ces forces sont proportionnelles à la surface sur laquelle elles ont lieu, et doivent l'être aussi à une certaine fonction de la vîtesse contre cette surface: mais on a vu (art. 105) que la *vîtesse moyenne* était fonction de celle des molécules qui se meuvent

près de la paroi, ou de la vîtesse de fond; en supposant donc la résistance à laquelle l'uniformité est due, proportionnelle au produit de la surface de la paroi par une fonction de la vîtesse moyenne (fonction qu'il s'agit de déterminer), on fera entrer dans son expression les divers élémens dont elle doit naturellement se composer.

On peut, d'après cette manière d'envisager les forces accélératrices et retardatrices qui agissent sur la masse fluide, poser les équations des mouvemens particuliers de chacun de ses élémens; l'examen immédiat de ces équations, qu'on trouvera ci-après (art. 243), donne lieu à des observations qui font soupçonner quelque lacune dans la série des faits par lesquels on explique l'uniformité de mouvement reconnue. Le moyen de suppléer à cette lacune est évidemment d'évaluer, par des expériences nombreuses et exactes, les indéterminées qui entrent dans les expressions dont la forme se déduit de l'examen des faits bien avérés; c'est la marche que je suivrai, après quelques détails préliminaires contenus dans les deux paragraphes suivans.

§. X.

Évaluation de la vîtesse et de la pression moyennes, à une section quelconque d'un courant d'eau, en introduisant, dans l'analyse, des forces retardatrices de l'espèce de celles dont l'observation a fait reconnaître l'existence dans le mouvement des fluides incompressibles et pesans.

110. Les résultats et les observations consignés dans les art. 102, 103, &c. jusqu'à 109 inclusivement, conduisent si naturellement à donner à la fonction qui doit représenter la résistance, lorsque la vîtesse est devenue constante, la forme $\lambda \chi . \phi(v)$ (v est la vîtesse moyenne dans une section quelconque; *voyez le Tableau de notation pour la signification des autres lettres*), que ce serait s'exposer à une perte de temps manifeste, de ne pas examiner de suite comment cette forme satisfait aux phénomènes; et il est bon

de s'assurer d'abord, *à priori*, qu'elle est compatible avec une vîtesse moyenne sensiblement constante.

$\phi(v)$ est une fonction qui renferme v avec des constantes à déterminer par expérience. On verra qu'elle doit contenir un terme sans v, fonction de la pente et de la section transversale, mais que, dans les applications pratiques que j'ai en vue, ce terme peut être négligé.

Les constantes ne sont pas les mêmes pour différens fluides : mais lorsqu'on les connaît pour un fluide en particulier, elles s'appliquent, avec les restrictions dont je parlerai quand il en sera temps, à la détermination des phénomènes de son écoulement, quelles que soient la forme et la pente du canal dans lequel cet écoulement a lieu; on doit les regarder comme dérivant de propriétés physiques qui subsistent dans tous les états géométriques où peut se trouver la masse fluide.

111. D'après tout ce qui précède, l'équation du mouvement d'une tranche fluide est, en se référant à ce qui a déjà été dit article 88,

$$\omega\delta s \cdot \frac{dv}{dt} = g\omega\delta z - \omega\delta p - \chi\delta s \cdot \phi(v).$$

112. *U* étant la vîtesse moyenne à une section déterminée Ω, on a, en suivant la même marche d'analyse qu'aux art. 90, 91 et 92,

$$\delta p = g\delta z - \Omega\frac{dU}{dt} \cdot \frac{\delta s}{\omega} + \Omega^2 U^2 \frac{d\omega}{\omega^3} - \frac{\chi\delta s}{\omega} \cdot \phi\left(\frac{\Omega}{\omega}U\right).$$

113. Cette équation, intégrée dans l'étendue de la masse, donne

$$p = gz - \Omega\gamma \cdot \frac{dU}{dt} - \frac{\Omega^2 U^2}{2\omega^2} - \int\left[\frac{\chi\delta s}{\omega} \cdot \phi\left(\frac{\Omega}{\omega}U\right)\right] + C.$$

114. Π étant la pression moyenne, rapportée à l'unité de surface qui a lieu à la section Ω, et *P*, la pression de même espèce qui a lieu à une autre section déterminée *O*, telle que *s* soit la

distance de O à ω, et λ celle de O à Ω, on a aux deux sections *limites* O et Ω, entre lesquelles il s'agit de prendre l'intégrale définie

$$P = -\tfrac{1}{2}\frac{\Omega^2}{O^2}U^2 + C,$$

$$\Pi = g\zeta - \Omega\Gamma\frac{dU}{dt} - \tfrac{1}{2}U^2 - \Sigma\left[\frac{\chi\delta s}{\omega}.\phi\left(\frac{\Omega}{\omega}U\right)\right] + C.$$

115. Ces deux dernières équations donnent

$$\Gamma\Omega\frac{dU}{dt} + \tfrac{1}{2}\Theta U^2 + \Sigma\left[\frac{\chi\delta s}{\omega}.\phi\left(\frac{\Omega}{\omega}U\right)\right] - g\zeta - (P - \Pi) = 0.$$

116. Et en éliminant $\frac{dU}{dt}$,

$$\begin{aligned} \Gamma p = g(\Gamma z - \gamma\zeta) + (\Gamma - \gamma)P + \gamma\Pi + \tfrac{1}{2}U^2[\Gamma\theta - (\Gamma - \gamma)\Theta] \\ + \gamma.\Sigma\left[\frac{\chi\delta s}{\omega}.\phi\left(\frac{\Omega}{\omega}U\right)\right] \\ - \Gamma.S\left[\frac{\chi\delta s}{\omega}.\phi\left(\frac{\Omega}{\omega}U\right)\right]. \end{aligned}$$

117. Les termes dus à la résistance qui modifie l'action de la pesanteur, sont en évidence dans les deux équations précédentes. Ces termes sont analogues à ceux qui contiennent A et a dans les équations des art. 11 et 12, et nous n'en avons point de correspondans à ceux qui, dans les articles cités, renferment f, qui est fonction de la pression sur la paroi, d'après les différences entre les propriétés physiques des solides et des fluides dont il a été question précédemment (art. 103).

118. Lorsque la section ω est constante de grandeur et de forme, le périmètre χ est aussi constant, et l'on a

$$\lambda\frac{dU}{dt} + \frac{\lambda\chi}{\omega}.\phi(U) - g\zeta - (P - \Pi) = 0.$$

119. $\lambda p = g(\lambda z - s\zeta) + (\lambda - s)P + s\Pi.$

120. La force retardatrice, fonction de la vîtesse, ne se trouve plus dans cette équation, comme son analogue ne s'est plus trouvée

dans l'équation de l'article 17, et il est bon de s'en rendre raison immédiatement. On sait que les forces accélératrices ou retardatrices, proportionnelles aux masses, produisent des variations égales dans les vîtesses, et que si deux corps juxta-posés se meuvent dans une même direction avec une vîtesse commune, toutes les forces qui tendront à augmenter ou à diminuer cette vîtesse de la même quantité et dans le même sens pour l'un et l'autre corps, ne contribueront en rien à la pression qui s'exerce au contact de ces deux corps : or c'est précisément ce qui a lieu dans le cas dont il s'agit ici, entre les masses $s\omega$ et $(\lambda - s)\,\omega$, en contact sur la section ω. Les résistances qui tendent à retarder les vîtesses de ces masses, sont respectivement $\chi s . \phi(U)$ et $\chi(\lambda - s)\,\phi(U)$ (la vîtesse U est, par hypothèse, commune à toutes les tranches) : elles sont donc proportionnelles aux masses ; et comme elles agissent dans le même sens, elles ne doivent point entrer dans la valeur de la pression.

121. L'équation de l'article 119, appliquée aux cas où l'eau se meut dans un tuyau de grosseur uniforme, donne lieu aux mêmes constructions et aux mêmes questions de *maxima* et *minima* traitées depuis l'article 61 jusqu'à l'article 80, avec cette seule différence dans les résultats, que, lorsqu'il s'agit d'un fluide, la courbe qui donne la plus grande ou la plus petite pression moyenne dans le sens de la directrice, remplit la même condition normalement à la paroi du tuyau.

122. Les équations des articles 115 et 118, qui donnent la vîtesse, peuvent être prises ou dans l'hypothèse de l'article 19, ou dans celle de l'article 24 ; je m'en tiendrai à cette dernière, la seule qui intéresse les applications à la pratique. L'équation de l'article 118, considérée sous ce point de vue, donne toujours une relation entre U et t numériquement assignable ; on a

$$dt = \frac{\frac{\omega}{\chi} \cdot dU}{\frac{\omega}{\lambda\chi}\,[g\zeta + (P - \Pi)] - \phi(U)};$$

équation séparée, au moyen de laquelle on pourra, dans toutes les hypothèses sur ϕ *(U)*, calculer t en *U*.

123. On rencontre fréquemment, dans l'Hydraulique de *Dubuat*, l'expression *rayon moyen ;* il désigne, par-là, la quantité linéaire $\frac{\omega}{\chi}$ qui se trouve dans le second membre de l'équation de l'article précédent.

§. XI.

De l'effet des forces retardatrices dont il est question dans le §. X, *pour amener la vîtesse d'un courant à l'uniformité ; comment cette uniformité se déduit de l'analyse et des formules précédentes.*

124. Il faut maintenant examiner comment les phénomènes observés sur le mouvement des eaux, s'expliquent par les principes précédemment établis. Il est de fait qu'un courant alimenté, à son origine, par une source d'un produit constant, établit naturellement son régime dans le lit où il coule, de manière qu'il passe, dans un temps donné, une même quantité de fluide par chacune de ses sections transversales, et qu'ainsi le produit de la *vîtesse moyenne*, considéré dans une section en particulier, par l'aire de cette section, est égal au produit analogue pris dans une autre section quelconque ; et si toutes les sections sont égales entre elles, la *vîtesse moyenne* est une quantité constante dans toute l'étendue de la masse fluide.

S'il y a des affluens, des dérivations ou des causes quelconques d'augmentation ou de diminution de volume d'eau, qui agissent d'une manière constante, la même égalité de produit par section s'établira dans toutes les parties du lit intermédiaires à deux points où ces variations ont lieu ; et dans toute section considérée isolément, la vîtesse moyenne sera, en général, constante par rapport au temps.

125. Cependant, lorsqu'on n'introduit pas dans l'analyse les

termes relatifs aux forces retardatrices, le mouvement, considéré dans l'hypothèse de l'article 24, doit être continuellement accéléré, ainsi qu'on peut s'en assurer par l'intégration de la dernière équation de l'article 96, qui donne, en supposant ω constant, hypothèse qui donne $v =$ constante $= U$ dans toute l'étendue de la masse fluide,

$$U = \frac{g\zeta + (P - \Pi)}{\lambda} t + C.$$

La vîtesse se compose d'une vîtesse initiale continuellement ajoutée à une autre vîtesse qui croît comme le temps; c'est la loi de mouvement qui résulte immédiatement de la pesanteur.

126. Mais les choses se passeront autrement, si la pesanteur est modifiée par une résistance qui soit fonction de la vîtesse, et croisse en plus grande raison que cette vîtesse. Pour voir d'abord, par l'analyse, comment le mouvement uniforme peut dériver d'une pareille résistance, faisons, dans l'équation de l'article 122,

$$\Phi U = c + \alpha U + \zeta U^2.$$

127. Cette équation deviendra

$$\frac{\chi}{\omega} dt = \frac{dU}{\frac{\omega}{\lambda\chi}[g\zeta + (P - \Pi)] - c - \alpha U - \zeta U^2}.$$

128. Soit, pour abréger,

$$\frac{\omega}{\lambda\chi}[g\zeta + (P - \Pi)] - c = n,$$

$$\frac{\alpha - \sqrt{(4\zeta n + \alpha^2)}}{2\zeta} = \rho; \quad \frac{\alpha + \sqrt{(4\zeta n + \alpha^2)}}{2\zeta} = \rho'.$$

Nous verrons bientôt que α, ζ et n doivent, dans les objets d'application ordinaire, être des quantités positives. L'équation différentielle deviendra

$$\frac{\zeta\chi}{\omega} dt = \frac{-dU}{(U + \rho)(U + \rho')};$$

et

et son intégrale complétée par la condition que t et U commencent ensemble, sera

$$\frac{\zeta\chi}{\omega} t = \frac{1}{\varrho' - \varrho} \log. \left[\frac{(U+\varrho')\varrho}{(U+\varrho)\varrho'}\right].$$

129. e étant le nombre dont le logarithme Népérien $= 1$, la valeur de U déduite de l'équation précédente sera, en faisant

$$\frac{\zeta\chi}{\omega}(\rho' - \rho) = b,$$

$$U = \frac{\varrho\varrho'(1 - e^{bt})}{\varrho' e^{bt} - \varrho}.$$

130. L'unité de temps étant la seconde, on voit que, dans la fonction du temps qui donne la valeur de U, le terme e^{bt} doit augmenter rapidement (on pourra s'en assurer d'une manière positive par les valeurs numériques qui seront bientôt déduites des expériences), et la valeur de U se réduire sensiblement, au bout d'un temps très-court, à celle $U = -\rho$, ou

$$U = \frac{-a + \sqrt{[4\zeta n + a^2]}}{2\zeta};$$

et c'est précisément ce que donnerait l'équation de l'article 122, combinée avec celle de l'article 126, en y faisant $\frac{dU}{dt} = 0$, c'est-à-dire, supposant le mouvement parvenu à l'uniformité.

131. Il est donc manifeste qu'une résistance, fonction de la vîtesse, peut amener le mouvement à l'uniformité, fournir l'explication des phénomènes dont il est parlé (art. 124), et la mesure de la vîtesse constante dont l'observation a prouvé l'existence. Il faut, pour cette explication et cette mesure, connaître la composition et la forme de la fonction qui convient aux phénomènes ; ce qui n'est pas sans difficulté : on verra cependant que la physique et l'analyse appliquées à de bonnes observations sur le mouvement des eaux courantes, conduisent à des résultats dont la pratique peut tirer un parti fort utile.

Le cas de la section transversale constante était le plus propre à rendre sensible l'effet immédiat et particulier de la force retardatrice, fonction de la vîtesse, pour réduire le mouvement à l'uniformité, puisque ce cas conduit (art. 125) aux formules pures et simples du mouvement uniformément varié, lorsqu'on fait abstraction de toute résistance provenant du frottement et de la cohésion. On trouve d'autres cas du mouvement des fluides qui, indépendamment d'une pareille résistance, conduisent aussi à l'uniformité sensible (*voyez* mon Architecture hydraulique, *art. 717 et 771*, et ma Mécanique philosophique, *art. 433, 436, 437, &c.)*; mais je m'écarterais inutilement de mon sujet en m'en occupant ici.

§. XII.

De la forme de la fonction qui doit représenter la résistance pour satisfaire aux observations faites sur les courans d'eau.

132. *Dubuat*, cherchant à représenter ses expériences par une formule, est parvenu à la suivante, dans laquelle le *pouce* est l'unité linéaire, et $g' = 362$ pouces = la vîtesse acquise par un grave après une seconde de chute; sa notation est d'ailleurs réduite à celle adoptée dans cet écrit, et la section transversale ω est supposée constante.

$$U = \frac{(243{,}7 \cdot g')^{\frac{1}{2}} \left[\left(\frac{\omega}{\chi} \right)^{\frac{1}{2}} - 0{,}1 \right]}{\left(\frac{\lambda}{\zeta} \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \log. \left(\frac{\lambda}{\zeta} + 1{,}6 \right)} - 0{,}3 \left[\left(\frac{\omega}{\chi} \right)^{\frac{1}{2}} - 0{,}1 \right].$$

Le logarithme qui se trouve au numérateur est *Népérien*, en sorte qu'après l'avoir pris dans les tables ordinaires, il faut le multiplier par 2,302585; les nombres 243,7 et 1,6 sont abstraits; $0{,}1 \sqrt{[g']}$ et $0{,}3 \sqrt{\left[\frac{\omega}{\chi}\right]}$ représentent, respectivement, $\sqrt{[\overset{\text{pouce.}}{0{,}01} \cdot g']}$ et $\sqrt{\left[\overset{\text{pouce.}}{0{,}09} \cdot \frac{\omega}{\chi}\right]}$.

133. D'après ces éclaircissemens, on trouvera qu'en prenant le mètre pour unité linéaire, la formule de *Dubuat* devient

$$U=\left[\frac{\sqrt{[243{,}7\cdot g]}}{\left(\frac{\lambda}{\zeta}\right)^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\log.\left(\frac{\lambda}{\zeta}+1{,}6\right)}-0{,}049359\right]\left[\left(\frac{\omega}{\chi}\right)^{\frac{1}{2}}-0{,}016453\right].$$

134. *Dubuat* est parvenu à cette expression de la vîtesse en composant et assemblant ses différentes parties d'après des comparaisons multipliées entre les valeurs qu'on en déduit et celles données par l'expérience ; malheureusement elle est un peu compliquée et affectée d'une quantité logarithmique qui y semble introduite plutôt par la nécessité de satisfaire à des nombres donnés, que par des considérations immédiates sur la nature des phénomènes.

135. Feu *Chezy*, directeur de l'École des ponts et chaussées, s'est occupé des mêmes recherches en 1775, onze ans avant la publication de la seconde édition de *Dubuat*, à l'occasion du canal de l'Yvette, et il a été conduit à une expression de la vîtesse infiniment plus simple que la précédente ; il assimile la résistance de la paroi aux résistances connues qui suivent la loi du carré de la vîtesse, et suppose que le rapport $\chi U^2 : \frac{\zeta}{\lambda}\omega$ est le même dans tous les courans d'un même fluide : il suffit, d'après cette hypothèse, de trouver, par expérience, les valeurs particulières de U, χ, ζ et λ, qui ont lieu en même temps dans un courant d'eau déterminé, et l'on en déduit la valeur générale de U, en fonction de constantes absolues et des quantités χ, ζ et λ appartenant à un courant d'eau quelconque.

136. La formule de *Chezy* se déduit de l'équation de l'article 118, en y faisant $\phi(U)=\zeta U^2$, $P=\Pi$, et supposant que le mouvement est parvenu à l'uniformité ; ce qui donne $\frac{dU}{dt}=0$. On a, dans ces hypothèses,

$$U=\sqrt{\left[\frac{g\omega\zeta}{\zeta\lambda\chi}\right]}.$$

Une seule expérience détermine la valeur de $\mathfrak{C}$, qui est un nombre abstrait, ou de $\frac{g}{\mathfrak{C}}$, qui est une quantité linéaire.

137. On s'est beaucoup occupé, depuis l'époque où *Chezy* a donné sa solution, de la détermination des résistances provenant du mouvement et de l'action soit des fluides sur les solides, soit des solides sur les fluides ; et il faut compter parmi les plus belles recherches de ce genre celle de *Coulomb*, qui a trouvé, pour l'expression de la résistance, deux termes variables, dont l'un est proportionnel à la première et l'autre à la seconde puissance de la vîtesse : la valeur absolue résultant de leur somme participera plus ou moins de l'un ou de l'autre, suivant que le mouvement sera lent ou rapide ; et l'on explique par-là des phénomènes dont il était impossible de se rendre raison en faisant la résistance simplement proportionnelle au carré de la vîtesse.

138. L'ingénieur *Girard* a tiré un parti aussi heureux qu'avantageux des progrès récens de cette branche de la physique : considérant que l'eau qui glisse sur la paroi *mouillée*, ou, plus exactement, sur la couche d'eau adhérente à cette paroi, est d'abord retardée par la viscosité qui tend à la retenir sur cette couche, il conclut de ce fait une première force retardatrice proportionnelle à la vîtesse. Mais, outre la viscosité dont l'effet est indépendant des aspérités de la paroi, il faut encore avoir égard à ces aspérités, qui donnent lieu à une seconde résistance ou force retardatrice, analogue à celle résultant du *frottement* dans les corps solides, dont elle diffère néanmoins en ce que sa valeur ne varie pas avec la pression (art. 103). Cette résistance suit la raison composée de la force et du nombre, pendant un temps donné, des impulsions que reçoivent les aspérités ; ce qui la rend proportionnelle au carré de la vîtesse.

Il exprime la résistance due à la cohésion par $R \times U$, R étant une quantité à déterminer par expérience ; supposant ensuite que l'adhérence à la paroi, des aspérités qui y sont disséminées, est la même que celle qui retient les molécules fluides les unes aux autres,

il fait la résistance due à ces aspérités, égale à $R\chi U^2$: ainsi la somme des deux résistances a pour expression $R\chi(U+U^2)$, qui, substitué à la place de $\chi\Phi(U)$ dans l'équation de l'article 118, donne, en faisant $dU=0$ et $P=\Pi$, l'équation $\frac{g\omega\zeta}{\lambda\chi}=R(U+U^2)$, qui est celle de *Girard*.

139. Il me semble qu'en raisonnant d'après l'hypothèse de l'égalité d'adhérence des aspérités à la paroi et des molécules fluides entre elles, il faudrait de plus énoncer que les aspérités disséminées sur la paroi ne sont pas contiguës les unes aux autres, et n'occupent qu'une partie $\frac{\chi}{\rho}$ du périmètre mouillé χ, sauf à faire $\rho=1$, si les expériences comportent une pareille valeur. Alors la résistance provenant de ces aspérités serait $R\frac{\chi}{\rho}.U^2$; et la résistance totale, $R.\frac{\chi}{\rho}(\rho U+U^2)$.

140. J'ajouterai, à l'appui de cette observation, que les valeurs respectives $R\chi U$ et $R\chi U^2$ des deux résistances, données par *Girard*, supposent que leur rapport est celui de $1:U$, et qu'elles sont égales lorsque $U=1$, ou lorsque le fluide parcourt, pendant une seconde, un espace égal à l'unité linéaire qui est censée facteur de $R\chi U$ (sans quoi deux quantités de même espèce, qui doivent être homogènes entre elles, ne seraient pas comparables). Mais ce résultat ne peut convenir qu'à un système métrique particulier, exclusivement à tout autre; car si, par exemple, le coefficient R de l'équation de l'article 138 est déterminé par des expériences dans lesquelles le mètre soit pris pour unité linéaire, cette équation exprimera que les deux résistances susmentionnées sont égales, lorsque l'espace parcouru pendant chaque seconde est d'un mètre, et qu'elles sont inégales lorsque cet espace est plus grand ou plus petit qu'un mètre. La valeur $R=0{,}0012181$, assignée par l'ingénieur *Girard*, est dans le cas dont je viens de parler; mais c'est une supposition

introduite dans l'analyse, qui n'est pas justifiée par l'examen, fait *à priori*, de la nature des deux résistances qu'on veut comparer.

141. Je pense encore, si l'on admet, pour expliquer la partie de la résistance proportionnelle au carré de la vîtesse, les obstacles dus à des aspérités disséminées sur la paroi, que l'adhérence de ces aspérités à cette paroi doit être supposée plus grande que celle qui retient les molécules fluides les unes aux autres. En effet, si ces deux adhérences étaient égales, les aspérités n'auraient pas plus de tendance à s'unir à la paroi qu'à s'unir à la masse fluide en mouvement; ce qui ne me paraît pas compatible avec les *chocs successifs* par lesquels on motive l'introduction du carré de la vîtesse dans la valeur de l'une des deux résistances : elle se confondrait, ce me semble, dans ce cas, en une seule proportionnelle à la vîtesse simple.

On pourrait présumer que ces aspérités séparées de la matière solide dans laquelle le lit est creusé, par l'épaisseur seulement de la couche fluide qui tapisse la paroi, participent à l'attraction qui s'exerce entre cette couche fluide fixe et le corps solide qu'elle mouille; ce qui ajouterait une force particulière à celle, commune à tout le système fluide, avec laquelle les aspérités adhèrent à la paroi.

On pourrait aussi, d'après *Dubuat*, regarder les aspérités comme immobiles, et attribuer la résistance proportionnelle au carré de la vîtesse à une espèce d'*engrenage*, plus ou moins complet suivant que le fluide se meut avec plus ou moins de lenteur, et qui, dans tous les cas, retarde en raison composée de la force et du nombre des chocs. Les points résistans sembleraient être alors des proéminences de la matière même du lit, recouvertes d'une couche de fluide.

Ces diverses explications donneraient au corps solide dans lequel le lit est creusé, plus d'influence sur la résistance qu'il ne paraît en avoir (art. 107) d'après les expériences de *Dubuat*.

142. Mais, sans m'appesantir sur ces remarques, je me borne à en conclure qu'en admettant la première et la seconde puissance de la vîtesse dans l'expression de la résistance, il faut, d'ailleurs, se réserver

tous les moyens possibles de rendre la valeur absolue de cette résistance conforme aux données de fait les plus exactes. L'équation de *Girard*, malgré les limitations dont j'ai parlé (art. 139 et 140), représente cependant les vîtesses trouvées par *Dubuat*, beaucoup plus simplement et avec la même exactitude que la formule de *Dubuat* lui-même (*voyez le paragraphe suivant*); et de plus, *Girard* a le mérite d'avoir considéré la résistance sous un point de vue qui lie d'une manière directe et immédiate la théorie mathématique des fluides à la saine physique.

143. Pour mettre le lecteur à portée d'apprécier, en parfaite connaissance de cause, les ressources qu'offre l'interprétation systématique des phénomènes, dans la détermination, *à priori*, des fonctions représentant les diverses résistances qui ont lieu dans la masse fluide, je vais donner les équations du mouvement rigoureusement conclues des résultats d'expérience consignés dans les articles 101 et suivans.

Je suppose, pour plus de simplicité, que l'eau coule dans un tuyau cylindrique; je considère la masse fluide comme composée d'une infinité de couches ou enveloppes concentriques, qui ont pour axe commun l'axe rectiligne du tuyau ; je nomme u' la vîtesse de la couche qui se meut le long de la paroi, u'' la vîtesse de la couche contiguë à celle-là, u''', u'''', &c. les vîtesses des couches enveloppées les unes dans les autres, jusqu'au filet central dont la vîtesse est $u^{(n)}$ (n désigne un numéro infini).

r', r'', &c. sont les rayons respectifs de ces enveloppes cylindriques, auxquelles je suppose des épaisseurs telles que chacune d'elles ait un même volume $= \delta m$, leur longueur commune dans le sens de l'axe étant λ, et I le sinus de l'angle que cet axe forme avec l'horizon.

L'enveloppe fluide qui coule le long de la paroi, éprouve du côté de cette paroi une résistance qui se compose, 1.° de la résistance due à la cohésion; 2.° d'une résistance particulière à la *limite*

du système fluide : elle reçoit, du côté de l'axe ou du centre, une impulsion qui dépend de la cohésion, et qui tend à l'accélérer.

Chacune des autres enveloppes exerce, du côté de la paroi, une impulsion qui tend à la retarder, et en reçoit une du côté de l'axe ou du centre, qui tend à l'accélérer, l'une et l'autre de ces impulsions étant uniquement dues à la cohésion.

Cette manière de considérer les forces accélératrices et retardatrices qui se combinent avec la pesanteur, est immédiatement déduite des faits consignés dans les articles 104 et suivans. Si l'on désigne par $F(u')$, la fonction de u' à laquelle la résistance particulière à la *limite* du système est proportionnelle, $f(u')$, $f(u'')$, &c. les fonctions de u', u'', &c. auxquelles les résistances dues à la cohésion sont proportionnelles, on aura, pour les valeurs des forces motrices qui animent respectivement les couches concentriques, depuis la paroi jusqu'au centre (π étant la demi-circonférence dont le rayon $=1$),

$$\frac{du'}{dt}\,\delta m = gI\,\delta m - \pi\lambda\left[r'\{f(u')+F(u')\} - r''.f(u''-u')\right];$$

$$\frac{du''}{dt}\,\delta m = gI\,\delta m - \pi'\lambda\left[r''.f(u''-u') - r'''.f(u'''-u'')\right];$$

$$\frac{du'''}{dt}.\delta m = gI\,\delta m - \pi'\lambda\left[r'''f(u'''-u'') - r''''.f(u''''-u''')\right],$$

&c. &c.

$$\frac{du^{(n-1)}}{dt}\,\delta m = gI\,\delta m - \pi\lambda\left[r^{(n-1)}f(u^{(n-1)}-u^{(n-2)}) - r^{(n)}.f(u^{(n)}-u^{(n-1)})\right],$$

$$\frac{du^{(n)}}{dt}.\delta m = gI\,\delta m - \pi\lambda\left[r^{(n)}.f(u^{(n)}-u^{(n-1)})\right].$$

Si l'on ajoute toutes ces équations ensemble, on aura pour la valeur de la force accélératrice moyenne, en désignant la masse totale par M, et observant que $n\delta m = M$,

$$\frac{\Sigma\left(\frac{du}{dt}\delta m\right)}{M} = gI - \frac{\pi\lambda r'[f(u')+F(u')]}{M};$$

équation

équation de laquelle on conclut que la valeur de la force accélératrice moyenne est indépendante des résistances qui n'ont pas lieu à la paroi ou aux *limites* du système ; et, sous ce point de vue, il était fort intéressant d'arriver ainsi immédiatement à cette équation, parce qu'elle achève de fixer les idées sur la forme de l'expression, qui doit être nulle lorsque le mouvement est parvenu à l'uniformité : elle est, au surplus, d'accord avec le contenu de l'article 109, où il est dit que la destruction des forces motrices imprimées par la pesanteur, dans l'étendue entière de la masse, ne peut provenir que des forces retardatrices qui ont lieu aux *limites* du système fluide.

On voit, de plus, que si les fonctions désignées par f, proportionnelles à la résistance due à la cohésion des molécules fluides entre elles, étaient nulles, le mouvement particulier de chaque couche ou enveloppe cylindrique serait nécessairement accéléré ; ce qui est encore dit à l'article cité.

144. Je m'en tiens à ces considérations générales, parce que les recherches dont je m'occupe étant essentiellement pratiques ou expérimentales, il ne faut pas trop les surcharger de discussions purement analytiques qui conduiraient à des hypothèses plus ou moins arbitraires sur la loi de la résistance ; il me suffira d'observer que la condition indispensable de l'homogénéité des équations précédentes, qui peut être satisfaite par une infinité de formes des fonctions désignées par f, ne l'est pas lorsque ces fonctions représentent des quantités proportionnelles à la vîtesse simple : mais l'introduction de cette vîtesse simple dans les formules pratiques, et en général l'usage qu'on fait d'expressions donnant une résistance infinie lorsque la vîtesse est elle-même infinie, ne fournissent aucune objection fondée contre la théorie de l'article 143 ; car ces expressions, qui sont déterminées de manière à réunir à la facilité dans le calcul toute l'exactitude nécessaire pour les applications, ne doivent être employées que dans certaines limites de vîtesses, entre lesquelles sont compris les cas auxquels ces applications peuvent se rapporter ; et, sous ce point

de vue, elles ne sont point en contradiction avec l'opinion très-probable que la résistance ne croît pas indéfiniment avec la vîtesse.

Or, pour arriver au but que je veux atteindre, en remplissant, autant que la nature de la question peut le permettre, la double condition de donner le plus possible aux faits et le moins possible aux considérations systématiques, je vois d'abord que d'après la valeur de la force accélératrice moyenne trouvée (art. 143), celle de la vîtesse à la paroi, et par conséquent celle de la vîtesse moyenne qui en est fonction, dépend de l'égalité à zéro, d'une expression indépendante des forces retardatrices f, qui entrent dans les équations de l'article cité; ensuite on sait que, sans faire aucune hypothèse sur la fonction inconnue de la vîtesse moyenne à laquelle la résistance qui maintient cette vîtesse constante est proportionnelle, la fonction dont il s'agit peut toujours se développer en une suite ordonnée, suivant les puissances entières de la vîtesse moyenne U, c'est-à-dire qu'on a

$$\Phi(U) = c + \alpha U + \beta U^2 + \gamma U^3 + \&c.$$

c étant une fonction indépendante de U, qui, ainsi que les quantités α, β, &c., est déterminée par expérience.

Supposant donc le mouvement parvenu à l'uniformité, et posant d'abord $P = \Pi$ (nous traiterons ensuite le cas où ces deux pressions extrêmes sont inégales), l'équation de l'article 118 devient

$$\frac{g\omega\zeta}{\lambda\chi} = c + \alpha U + \beta U^2 + \&c.$$

et l'on peut s'en servir très-utilement pour appliquer les connaissances expérimentales actuelles à des déterminations d'une grande importance, et qui auront toute l'exactitude nécessaire à la pratique.

145. Examinons, en premier lieu, ce que peut être la fonction c. Si l'on suppose que la section ω et son périmètre χ sont donnés, $\frac{\chi c}{g\omega}$ sera la valeur de $\frac{\zeta}{\lambda}$ lorsque $U = 0$, c'est-à-dire, le sinus de l'angle que la directrice du canal, supposée rectiligne, doit faire avec

l'horizon, pour que le fluide, d'abord stagnant, soit prêt à se mouvoir. Cet angle est très-petit : mais il ne doit pas être nul, dès qu'on admet la cohésion; et l'expérience prouve, en effet, que des vases remplis de fluide jusqu'à l'arrasement de leurs bords, peuvent être tant soit peu inclinés sans que le fluide s'en échappe.

146. L'angle dont il s'agit a une certaine relation avec la forme et les dimensions du vase ou du canal, puisqu'il est fonction de χ et de ω : ainsi il existe, pour une valeur quelconque de R, une valeur correspondante de I, que j'ai désignée (*Tableau de notation*) par ι, telle que le fluide cesse de couler lorsque $I = \iota$. (Il est à observer que si, comme on le suppose ici, ι varie avec R, ses variations ne doivent être sensibles que lorsque R est très-petit.)

D'un autre côté, la matière dans laquelle le lit est creusé, ayant le pouvoir de tenir une couche de fluide adhérente à la paroi, il suit de là, et l'expérience prouve en effet, que les dimensions de la section transversale ω, ou la longueur du *rayon moyen* $\frac{\omega}{\chi}$, peuvent, pour une pente donnée, être diminuées de telle sorte que, pour cette pente et pour toutes celles qui seraient moindres qu'elle, une quantité déterminée de fluide, étendue sur cette paroi, y reste fixée et immobile ; et même, s'il s'agit d'un tuyau, le diamètre peut en être assez petit pour que le phénomène ait lieu sous toutes les inclinaisons.

147. On doit donc, lorsque le mouvement est près de naître, ou que $U = 0$, avoir $\alpha U + \beta U^2 +$ &c., égale à une fonction dont $R - \rho$ et $I - \iota$ soient deux facteurs; et l'équation la plus simple qui remplisse cette condition est

$$g(R - \rho)(I - \iota) = \alpha U + \beta U^2 + \text{\&c.}$$

148. On est assuré d'avance que ρ et ι sont des quantités extrêmement petites, et qu'ainsi leur produit $\rho\,\iota$ est négligeable devant

les quantités du premier ordre $R\iota$ et $I\rho$; on a donc, en ne tenant aucun compte du terme où ce produit est facteur,

$$gRI = g(R\iota + I\rho) + \alpha U + \zeta U^2 + \&c.$$

149. Cette équation, comparée à celle de l'article 144, donne

$$c = g(R\iota + I\rho),$$

valeur adaptée à la nature des phénomènes.

150. Si nous passons au deuxième terme αU, il faudra observer que d'après des théories très-connues, en donnant à U une valeur convenable, la somme de tous les termes qui suivent le deuxième est négligeable par rapport à ce deuxième terme; l'équation $\frac{g\omega\zeta}{\lambda\chi} = c + \alpha U$ offre donc un moyen de représenter le mouvement dans les cas où la vîtesse sera extrêmement petite.

151. Enfin, si la vîtesse est telle, que les deux termes $c + \alpha U$, employés seuls, donnent des anomalies trop fortes, il faudra y ajouter le troisième terme ζU^2; mais ici nous sommes forcés de recourir aux examens physiques et aux épreuves, pour connaître jusqu'à quel degré de vîtesse les trois termes $c + \alpha U + \zeta U^2$ peuvent nous conduire, et c'est l'objet de recherches dont je vais m'occuper.

§. XIII.

Première application de quelques expériences faites sur le mouvement des eaux dans les canaux découverts, à la détermination générale des rapports qui existent entre la longueur, la pente, la section transversale, le périmètre de cette section et la vîtesse, en ayant égard aux forces retardatrices dues au frottement et à la viscosité.

152. Le résultat des considérations présentées dans le paragraphe précédent, est qu'il faut d'abord examiner comment les phénomènes sont représentés en donnant à la fonction $\Phi(U)$ la valeur

$$\Phi(U) = g(R\iota + I\rho) + \alpha U + \zeta U^2.$$

Pour écarter de ce premier rapprochement tout ce qui compliquerait inutilement la question, j'appliquerai d'abord l'équation de l'article 118 à des cas pour lesquels, indépendamment des conditions $\omega =$ *constante* et $\chi =$ *constante*, on ait sensiblement l'égalité entre les pressions extrêmes P et Π. Ces cas sont ceux des canaux découverts, dans les parties de leurs lits où les sections transversales sont constantes de grandeur et de figure, et les pentes uniformes.

153. Lorsque dans ces parties de canaux le régime est établi et la vîtesse constante, on a, d'après ce qui est dit précédemment, en faisant dans l'équation de l'article 118,

$$dU = 0,\ P = \Pi \text{ et } \Phi\,(U) = g\,(R\iota + I\rho) + \alpha\, U + \zeta\, U^2,$$
$$g R I = g\,(R\iota + I\rho) + \alpha\, U + \zeta\, U^2.$$

154. Quatre observations dont chacune donnerait des valeurs particulières de R, I et U, en donneraient aussi à ι, ρ, α et ζ. Mais j'ai déja dit que ι et ρ étaient d'une excessive petitesse; en effet, selon *Dubuat* (Principes d'hydraulique, *art.* 53), on a, dans les canaux à ciel découvert, $\iota < 0{,}000002$, et il a observé que dans une paroi cylindrique pour laquelle on avait $R = 0^{m},0003$, à-peu-près, l'eau restait adhérente sous toutes les pressions.

Il faudrait, d'après cela, si l'on voulait connaître les relations entre ι, ρ, ω et χ avec une précision relative ou proportionnée à la petitesse de ι et ρ, faire des expériences uniquement ou principalement dirigées vers ce but particulier; et les meilleures de celles publiées sur le mouvement des eaux courantes, sont insuffisantes pour une détermination aussi délicate.

Mais, sans rien prononcer sur ces relations, il résulte de la petitesse de ι et ρ qu'elles ne doivent avoir qu'une influence insensible sur les valeurs de α et de ζ, et qu'ainsi, quand il ne s'agira que de déterminations relatives à la pratique, on pourra employer les valeurs de α et ζ, qu'on aura déduites de bonnes expériences sur le mouvement de l'eau dans les canaux naturels ou factices, en négligeant les termes qui contiennent ι et ρ.

155. Je pose donc l'équation

$$\frac{g\omega\zeta}{\lambda\chi} = \alpha U^2 + \beta U^2,$$

et je vais chercher les valeurs des constantes α et β, qui satisfont à des expériences faites avec soin sur le mouvement de l'eau dans des canaux découverts. J'emploierai d'abord celles que l'ingénieur *Girard* a rapportées dans son Mémoire sur le projet du canal de l'Ourcq, et d'après lesquelles il a calculé le coefficient R (art. 138), en supposant que l'expression de la résistance était $\chi R\ (U+U^2)$; ce qui me donnera une première détermination : mais je réunirai ensuite ces expériences à vingt-trois autres faites par *Dubuat*, afin d'obtenir des valeurs ultérieures qui soient fondées sur le plus grand nombre possible de bonnes observations, et sur-tout indépendantes des erreurs qu'on peut commettre en déduisant la vîtesse moyenne de celle à la surface.

156. Pour y parvenir de la manière la plus directe et la plus sûre, j'ai employé une méthode qu'il est bon de rapporter ici, parce qu'on pourra s'en servir avec avantage dans un grand nombre de recherches physico-mathématiques.

Je mets l'équation de l'article précédent sous la forme $\frac{g\omega\zeta}{\lambda\chi U} = \alpha + \beta U$; et faisant $\frac{g\omega\zeta}{\lambda\chi U} = y$, j'ai l'équation du premier ordre,

157. $$y = \alpha + \beta U,$$

dans laquelle toutes les quantités sont linéaires, à l'exception de β qui est un nombre abstrait.

158. On calculera autant de valeurs de y correspondantes à des valeurs déterminées de U, qu'on a d'expériences sur les vîtesses observées dans des canaux où ζ, λ, ω et χ ont été mesurés; et ces calculs faits, on pourra, pour déterminer α et β, employer l'une des excellentes méthodes publiées par *Laplace* dans sa Mécanique

céleste (*I.re partie, liv. III, art. 39 et 40*), qui sont immédiatement applicables aux évaluations dont il s'agit ici.

159. Je dis l'une des méthodes, parce que *Laplace* en propose trois, dont la dernière, celle dont je conseille sur-tout l'usage, a la propriété d'annuller la différence entre les anomalies positives et les négatives, et de rendre la somme de ces anomalies, prises toutes positivement, un *minimum*.

160. Les constantes α et β étant ainsi déduites de la totalité des expériences ou du moins de celles qui ont le plus d'accord entre elles, il faudra vérifier si les valeurs de U, calculées par la formule où entrent ces constantes, redonnent les vîtesses éprouvées avec une exactitude suffisante, et s'assurer par-là si la fonction $\alpha U + \beta U^2$ convient aux phénomènes observés.

161. On pourrait se servir, dans ces diverses déterminations, de la construction graphique de l'équation $y = \alpha + \beta U$, faite d'après les valeurs correspondantes de U et y données par l'expérience; et c'est même là un avantage particulier à la méthode que j'expose ici. U étant l'abscisse et y l'ordonnée, le *lieu géométrique* de l'équation $y = \alpha + \beta U$ doit être une ligne droite; la construction des valeurs de y, données par l'expérience, fera voir, au premier coup-d'œil, si les résultats sont compatibles ou non avec la fonction proposée; et s'ils le sont, il sera aisé, avec un peu d'attention et d'adresse, de tracer une ligne droite dans une direction et une position telles, que les anomalies se trouvent distribuées, de part et d'autre de cette direction, le plus également possible.

Les abscisses U n'excèdent pas un ou deux mètres, dans les expériences auxquelles j'appliquerai ma méthode : il est convenable de les tracer de grandeur réelle; et l'on peut prendre pour les ordonnées y, qui sont toujours plus petites que 0,01, une échelle centuple de celle des abscisses U.

Il est manifeste que les nombres obtenus par cette construction doivent avoir toute la précision que comportent les expériences les mieux faites ; mais le calcul est préférable à tous égards.

162. Les expériences que je vais employer sont au nombre de douze, dont deux ont été faites par feu *Chezy* sur la rigole de Courpalet et sur la Seine, et dix sont tirées de l'ouvrage de *Dubuat;* ce sont les mêmes auxquelles l'ingénieur *Girard* a appliqué sa formule. *(Voyez le Tableau comparatif, n.° 1.)*

Les valeurs de y ou $\frac{g\omega\zeta}{\lambda\chi U}$, déduites de ces expériences, sont contenues dans le Tableau suivant, et peuvent se vérifier par les données consignées au *Tableau comparatif, n.° 1.*

		U	y			U	y
1.	Rigole de Courpalet........	0,094051.	0,00106823.	7.	Canal du Jard...	0,332219.	0,00151405.
2.	Canal du Jard...	0,137345.	0,00127781.	8.	Hayne.........	0,337349.	0,00144652.
3.	*Idem*........	0,148857.	0,00141209.	9.	(*) Jard.......	0,372087.	0,00484312.
4.	*Idem*........	0,189760.	0,00148159.	10.	(*) Riv. de Seine.	0,652790.	0,00489910.
5.	(*) *Idem*.....	0,248518.	0,00301676.	11.	(*) Hayne......	0,720968.	0,00371049.
6.	Rivière de Hayne.	0,282091.	0,00155320.	12.	Hayne.........	0,803563.	0,00302404.

163. Les expériences des n.ºs 5, 9, 10 et 11 forment, dans les valeurs de y, des solutions de continuité, qui ont été remarquées par l'ingénieur *Girard,* et qui sont principalement sensibles dans les trois premières, eu égard aux rapports entre les valeurs de U, auxquelles elles correspondent. Mais ces irrégularités apparentes tiennent, 1.° à ce que les vîtesses observées dans les expériences 5, 9 et 11, étaient plus petites que les vîtesses réelles ; 2.° à ce que, dans l'expérience 10, la valeur de ω, donnée par *Chezy,* était trop forte. L'existence de ces anomalies est bien constatée ; tout ce qu'on peut exiger à leur égard, est que le calcul indique dans

dans quel sens elles sont en défaut, et l'on verra bientôt que cette condition est remplie.

164. Les valeurs de α et ζ, calculées par la méthode des articles 155 et suivans, et modifiées par quelques considérations particulières, pour répartir le mieux possible les anomalies des huit autres observations, sont

$$\alpha = 0{,}00093 \,;\ \zeta = 0{,}00266.$$

165. Ainsi l'équation qui donne les relations générales entre ζ, λ, ω, χ et U, est

$$\frac{g\,\omega\,\zeta}{\lambda\,\chi} = 0{,}00093 \,.\, U + 0{,}00266\, U^2.$$

166. On déduit de cette équation,

$$U = -0{,}174812 + \sqrt{\left[\, 0{,}0305592 + \frac{3687{,}52 \,.\, \omega\,\zeta}{\lambda\,\chi} \,\right]}.$$

167. I étant la pente, par mètre, et R ce que *Dubuat* appelle *le rayon moyen*, dont j'ai donné la définition (art. 123), la valeur de U deviendra

$$U = -0{,}175 + \sqrt{[\, 0{,}03 + 3688 \,.\, I R \,]}\,;$$

formule qui à l'avantage d'être infiniment plus commode pour le calcul que celle de *Dubuat* (art. 133), réunit celui de mieux représenter ses propres expériences.

168. On s'assurera que la seconde des conditions dont je viens de parler est remplie, en examinant avec quelque attention le Tableau comparatif (n.° 1). Les vîtesses moyennes, consignées dans la colonne 2 de ce Tableau, sont conclues des vîtesses à la surface (colonne 1.re) par une formule de *Dubuat*, dont j'examinerai bientôt la composition, et rapportée au mètre pris pour unité linéaire. L'ingénieur *Girard* a aussi calculé les vîtesses moyennes par une formule équivalente.

On voit, dans les colonnes de différences, que l'équation de

Dubuat s'éloigne plus des résultats observés, que celle de *Girard*, dans les différences positives, et moins dans les différences négatives; la mienne donne plus de coïncidence avec les observations que l'une et l'autre, quel que soit le signe de la différence.

En effet, en rapprochant les différences moyennes, on a

	DIFFÉRENCES ABSOLUES MOYENNES,	
	POSITIVES.	NÉGATIVES.
Formule de *Dubuat*........	0,034.	0,039.
Formule de *Girard*........	0,024.	0,097.
Formule de *Prony*.........	0,020.	0,006.

169. Ce sont là les *différences absolues;* et l'on a d'autant plus d'exactitude qu'elles sont plus petites : cependant elles ne donnent pas la mesure exacte des erreurs, qui ne peut se conclure que des *différences proportionnelles.* En effet, il est évident qu'une anomalie de 0,1 sur 1 donne lieu à une erreur dix fois plus grande que la même anomalie absolue 0,1 sur 10. Ainsi A étant le résultat observé et A' le résultat calculé, la vraie mesure de l'erreur n'est pas $A - A'$, mais $\frac{A - A'}{A}$ ou $1 - \frac{A'}{A}$.

170. Les degrés respectifs d'exactitude des trois formules doivent donc se conclure des *différences proportionnelles* moyennes, qui sont rapprochées dans le tableau suivant :

	DIFFÉRENCES PROPORTIONNELLES MOYENNES,	
	POSITIVES.	NÉGATIVES.
Formule de *Dubuat*........	0,078.	0,290.
Formule de *Girard*........	0,160.	0,182.
Formule de *Prony*.........	0,069.	0,036.

Ici *Dubuat* a l'avantage sur *Girard*, dans les différences positives, et le désavantage dans les négatives ; ma formule conserve la supériorité d'exactitude pour l'une et l'autre espèce de différences.

En résumé, les écarts de la formule de *Dubuat* sont de $\frac{8}{100}$ à $\frac{29}{100}$ des résultats observés ; ceux de la formule de *Girard*, de $\frac{16}{100}$ à $\frac{18}{100}$; et ceux de la mienne, de $\frac{7}{100}$ à $\frac{4}{100}$.

171. Les trois formules s'accordent pour donner des vîtesses plus grandes que celles déduites des 5.ᵉ, 9.ᵉ, 10.ᵉ et 11.ᵉ observations. On trouve dans *Dubuat* (Principes d'hydraulique, *art. 402 et suiv.*), le détail des causes auxquelles il faut attribuer l'erreur par défaut qui s'est glissée dans les 5.ᵉ, 9.ᵉ et 11.ᵉ Quant à la 10.ᵉ, la vîtesse a été bien observée : mais il y a erreur, par excès, sur l'évaluation de l'aire ω *(voyez* le Rapport de *Girard, page 43) ;* et comme cette aire a été employée dans le calcul telle que *Chezy* l'a donnée, la vîtesse calculée doit nécessairement être plus grande que celle observée. Je reviendrai sur cette expérience.

§. XIV.

Application de cinquante-une expériences faites sur le mouvement des eaux dans les tuyaux cylindriques, à la détermination générale des rapports qui existent entre la longueur, la pente, le diamètre, les charges d'eau sur l'une et l'autre extrémité, et la vîtesse, en ayant égard au frottement et à la viscosité.

172. L'APPLICATION que je vais faire de l'équation de l'article 118,

$$\lambda \frac{dU}{dt} + \frac{\lambda\chi}{\omega} . \phi(U) - g\zeta - (P - \Pi) = 0,$$

à l'écoulement de l'eau par les tuyaux de conduite, fournira des résultats nouveaux et très-satisfaisans, dont on pourra retirer une grande utilité dans la pratique.

173. Les pressions ou charges d'eau extrêmes P et Π étant supposées constantes (on ne peut pas ici, comme lorsqu'il s'est agi des canaux à ciel découvert, les supposer égales), il est reconnu par l'expérience que le mouvement parvient promptement à l'uniformité ; je fais abstraction de quelques petites inégalités, à-peu-près périodiques, qui se remarquent sur-tout dans le mouvement des jets d'eau, et dont la considération m'écarterait de mon sujet sans utilité. Il faut, en conséquence, poser l'équation

$$\frac{\omega(g\zeta + P - \Pi)}{\lambda\chi} = \Phi(U).$$

174. Z étant la différence de niveau entre la surface de l'eau dans le réservoir supérieur et celle de l'eau dans le bassin inférieur lorsqu'il y a une charge d'eau sur l'orifice inférieur, on a, dans ce cas, en observant que $\frac{P}{g}$ et $\frac{\Pi}{g}$ expriment les enfoncemens respectifs des orifices extrêmes au-dessous des mêmes surfaces,

$$Z + \frac{\Pi}{g} = \zeta + \frac{P}{g},$$

d'où $\quad gZ = g\zeta + P - \Pi;$

Il faut faire $\Pi = 0$ dans ces équations, lorsque le tuyau se vide dans l'air, ou qu'il n'y a pas de charge d'eau sur l'orifice inférieur.

de plus $\frac{Z}{\lambda}$ est, pour les tuyaux, la quantité qui correspond à I dans les canaux découverts, et que je désignerai ici par j.

Enfin $\frac{\omega}{\chi} = \frac{1}{4}D$. ($D$ est le diamètre du tuyau. *Voyez le Tableau de notation*).

175. Toutes ces valeurs substituées dans l'équation de l'article 173 donnent

$$\tfrac{1}{4}gjD = \Phi(U).$$

176. Les mêmes conclusions que nous avons tirées du raisonnement et de l'expérience (art. 143 et suivans), sont applicables au cas dont il s'agit ici. Il est prouvé, par le fait, que pour un diamètre quelconque D, on pourrait donner une valeur à j (qui

dépend de celle de D, sur-tout dans les tuyaux étroits) assez petite pour que l'écoulement n'eût pas lieu ; et réciproquement le tuyau peut être tellement étroit, qu'une pression et une inclinaison quelconques ne détermineraient pas le fluide à couler le long de la paroi à laquelle ce fluide resterait adhérent.

177. d étant ce que devient D lorsque la moindre augmentation dans le diamètre du tuyau y rendrait le mouvement de l'eau possible, les mêmes raisonnemens qui ont conduit à l'équation de l'article 153, conduisent à la suivante:

$$\tfrac{1}{4} g D j = \tfrac{1}{4} g (D\iota + j d) + \alpha U + \beta U^2.$$

178. Et d'après les observations consignées dans l'article 154, j'appliquerai, pour arriver aux résultats qui intéressent la pratique, les expériences faites sur les tuyaux de conduite, à l'équation

$$\tfrac{1}{4} g j D = \alpha U + \beta U^2,$$

en employant, pour déterminer les constantes α et β, la méthode exposée dans les articles 156 et suivans.

179. Je pense qu'il eût été difficile, sans le secours de cette méthode, de parvenir, comme je l'ai fait, à représenter par une formule très-simple le mouvement de l'eau dans les tuyaux, en m'assurant d'avance que cette formule était d'accord avec cinquante-une expériences, faites séparément par différentes personnes, sur des conduites qui avaient depuis $0^m,03$ jusqu'à $0^m,5$ de diamètre et depuis 3 ou 4 mètres jusqu'à près de 2300 mètres de longueur.

180. Le Tableau (n.° 2) offre tous les résultats fournis tant par l'expérience que par le calcul, sur lesquels j'ai établi la détermination des relations qui existent entre la longueur d'un tuyau, sa pente, son diamètre, les charges d'eau sur l'une et l'autre de ses extrémités, et la vîtesse de l'eau qui coule dans ce tuyau.

La colonne 10 contient les valeurs de $\frac{gDj}{4U}$; et pour rendre la marche de ces valeurs parfaitement sensible, je les ai représentées

graphiquement dans la planche 2 (n.° 1), où les abscisses étant les vîtesses observées U, rapportées à une échelle de 0^{m},25 pour 1 mètre, les ordonnées sont les quantités linéaires $\frac{gDj}{4U}$, rapportées à une échelle centuple de celle des abscisses, c'est-à-dire, tracées avec des longueurs égales à vingt-cinq fois leurs longueurs réelles; ces longueurs valent cent fois les réelles sur le dessin original, dont la planche 2 n'est que la réduction au quart. On trouve d'ailleurs, sur cette planche même, toutes les explications nécessaires pour en faciliter l'intelligence.

181. Il est manifeste par l'examen des nombres de la colonne 10, et évident à l'inspection de la planche 2, que les rapports entre les différences des ordonnées $\frac{gDj}{4U}$, et les différences correspondantes des abscisses U, diffèrent peu les uns des autres, et encore moins d'un rapport constant assignable par la méthode des articles 156 et suivans : ainsi la fonction $\alpha U + \beta U^2$ doit satisfaire sensiblement aux phénomènes observés.

182. On trouve, en passant aux déterminations numériques,

$$\alpha = 0{,}00017; \quad \beta = 0{,}003416.$$

183. On a donc l'équation générale,

$$\tfrac{1}{4} g D j = 0{,}00017 . U + 0{,}003416 \, U^2,$$

184. Qui, résolue, donne,

$$U = -0{,}0248829 + \sqrt{[(0{,}000619159 + 717{,}857 Dj)]}.$$

185. Cette équation a éte employée pour le calcul des vîtesses de la colonne 13, dont les valeurs offrent l'accord le plus satisfaisant avec celles des vîtesses observées. Cet accord est remarquable dans des expériences faites par plusieurs observateurs qui ont travaillé séparément et avec des appareils différens; la quarante-troisième sur-tout mérite attention par l'identité presque parfaite de ses résultats et de ceux

de la formule, malgré la grande disproportion entre la grosseur du tuyau sur lequel cette expérience a été faite et celle des tuyaux qui ont servi aux autres observations : j'ai déjà parlé de l'extrême variété des longueurs, qui s'étend depuis 3 ou 4 mètres jusqu'à près de 2300 mètres. Les uns avaient une charge d'eau sur leur orifice intérieur, et les autres n'en avaient pas ; mais il paraît, ainsi que *Dubuat* l'a remarqué (Principes d'hydraulique, *tome II, page 24*), que cette circonstance n'exige aucun changement dans le calcul, pourvu que Z soit évalué comme il a été dit à l'article 174.

On voit, par les colonnes des différences proportionnelles, que les vîtesses calculées ne diffèrent, valeurs moyennes, de celles observées, que de $\frac{1}{40}$ ou $\frac{1}{25}$ environ, en plus ou en moins, respectivement. Je crois que, dans l'état actuel de l'hydraulique expérimentale, il serait difficile d'obtenir une plus grande exactitude.

186. Le calcul de U par la formule de l'article 184 n'a rien de difficile ; mais lorsqu'il s'agira de calculs pratiques ordinaires, et que la vîtesse de l'eau dans le tuyau ne sera pas excessivement petite, on pourra évaluer U par l'équation très-simple,

$$U = 26,79 \sqrt{[Dj]}.$$

187. Cette équation nous apprend que la vîtesse suit sensiblement la raison directe composée des racines carrées du diamètre et de la charge d'eau, et inverse de la racine carrée de la longueur du tuyau ; résultat conforme à celui auquel *Bossut* était arrivé par ses expériences ; savoir, que, pour une charge d'eau et un diamètre donnés, la vîtesse, dans un tuyau horizontal, est en raison inverse de la racine carrée de la longueur de ce tuyau.

188. Toutes les déterminations précédentes supposent que les sections horizontales, tant du réservoir de prise d'eau que du bassin où cette eau va se rendre, sont tellement grandes par rapport à la section transversale du tuyau, que les tranches horizontales de fluide, dans ce réservoir et ce bassin, peuvent être considérées comme

immobiles, ou ayant une vîtesse insensible, par rapport à celle de l'eau dans le tuyau. Ce cas, qui est presque le seul à considérer, quant aux objets de pratique, exige qu'on ne rapporte la section ω et la longueur λ qu'à l'intervalle dans lequel le mouvement a lieu, c'est-à-dire, à celui compris entre les extrémités du tuyau, les distances verticales de ces extrémités à la surface de l'eau, dans le réservoir et le bassin, donnant les pressions extrêmes P et Π; voilà une distinction à faire entre les différentes parties du systême fluide, qui résulte immédiatement de l'interprétation fidèle de l'analyse par laquelle nous sommes parvenus aux diverses formules données dans ce paragraphe, et à laquelle il faut soigneusement avoir égard dans les applications de ces formules aux questions particulières ou aux expériences.

189. J'ajouterai que l'écoulement par un orifice pratiqué dans une même paroi, et même celui par un petit ajutage, ne doivent pas se calculer par les formules applicables aux longs tuyaux. D'abord le cas des orifices percés dans de minces parois laisse le rapport $\frac{\zeta}{\lambda}$ entièrement indéterminé, et échappe, par conséquent, à la formule de l'article 184, dans lequel entre la quantité $j = \frac{\zeta}{\lambda} + \frac{P - \Pi}{g\lambda}$. Quant à l'écoulement par des ajutages ou des tuyaux d'une petite longueur, il faut observer que l'application de la formule de l'article 184 suppose que le mouvement est parvenu à l'uniformité par l'équilibre entre la pesanteur relative du fluide et les résistances dont la valeur générale a été donnée précédemment; mais cet équilibre ne peut s'établir que lorsque le régime de l'eau est devenu permanent, et par conséquent lorsqu'elle a parcouru une longueur suffisante de la paroi du tuyau. On peut remarquer, dans le Tableau (n.° 2), que les plus fortes anomalies sont données, en général, par les tuyaux qui n'ont qu'environ 3 mètres de longueur; et il ne faut pas appliquer la formule de l'article

l'article 184 à des tuyaux plus courts que ceux-là : le mouvement sensiblement uniforme qui s'établirait soit dans ces tuyaux, soit dans de simples orifices, tient, comme je l'ai déjà observé, à des causes particulières.

Enfin les phénomènes d'écoulement examinés dans ce paragraphe supposent que l'eau remplit toute la capacité intérieure du tuyau.

§. XV.

Des rapports entre la vîtesse à la surface, *la vîtesse* de fond *et la vîtesse* moyenne *d'un courant d'eau qui coule dans un canal rectiligne.*

190. J'AI donné, dans le paragraphe XIII, une première détermination des relations générales entre la pente, la longueur, &c. et la vîtesse dans un canal découvert, en combinant les principes généraux de la théorie du mouvement des fluides avec les résultats de huit expériences. Les vîtesses moyennes que j'ai introduites dans l'analyse, y sont déduites des vîtesses à la surface, par une formule équivalente à celle donnée par *Dubuat* (Principes d'hydraulique, *tome I, page 92,* et *tome II, page 87*); mais comme je reviendrai sur cet objet pour réunir aux expériences faites sur la rigole de Courpalet, le canal du Jard et la rivière de Hayne, beaucoup d'autres expériences très-soignées, tirées du même ouvrage, et faites sur des canaux factices, il est bon de discuter les règles de calcul proposées par *Dubuat* pour déterminer les relations entre les vîtesses *à la surface, de fond* et *moyenne.*

Cet habile observateur a déduit de ses expériences les relations suivantes entre ces vîtesses *à la surface, de fond* et *moyenne*, désignées respectivement par V, W et U, le mètre étant l'unité linéaire :

1.° $W = \left(V^{\frac{1}{2}} - w^{\frac{1}{2}}\right)^2$, w est une vîtesse constante $= 0^m,0270699$ $=$ 1 pouce d'ancienne mesure; $w^{\frac{1}{2}} = 0,16453$.

2.° $U = \frac{1}{2}\,(V + W)$.

191. Ces équations donnent,

1.° . . . . . . $U = \left(V^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\, w^{\frac{1}{2}}\right)^2 + \frac{1}{4}\, w.$

C'est la formule qui a servi à déduire les vîtesses moyennes consignées dans la colonne 2 du Tableau (n.° 1) des vîtesses observées à la surface.

2.° . . . . $V = \left(W^{\frac{1}{2}} + w^{\frac{1}{2}}\right)^2.$

192. On voit aisément, par l'examen de ces équations, que si elles peuvent être appliquées à des cas de pratique dans lesquels la valeur de la vîtesse est renfermée entre certaines limites, on ne doit pas les regarder comme exactement adaptées à la nature des phénomènes, considérés sous un point de vue général. L'équation $V = (W^{\frac{1}{2}} + w^{\frac{1}{2}})^2$ dit que lorsque la vîtesse de fond est nulle, la vîtesse à la surface est de $0^m,027$, ou d'un pouce d'ancienne mesure : ce résultat peut être regardé comme approximatif, en ce que, d'après l'observation, la vîtesse diminuant progressivement de la surface au fond, peut devenir tellement petite à la surface, qu'elle soit à-peu-près insensible au fond : mais cette équation, donnant aussi la même valeur $0^m,027$ à W, lorsque $V = 0$, se trouve, sous ce point de vue, en pleine contradiction avec les phénomènes observés tant sur la vîtesse que sur la résistance due au frottement et à la cohésion; car, si l'on admettait cette valeur, on serait forcé d'en conclure que, dans certains cas, la vîtesse peut décroître du fond à la surface.

L'équation $V = (W^{\frac{1}{2}} + w^{\frac{1}{2}})^2$ se trouve cependant indiquée assez naturellement par plusieurs expériences de *Dubuat*, qui font voir que les vîtesses de fond, exprimées en pouces, étant

$$W = 4;\ W = 9;\ W = 16;\ W = 25;\ W = 36;$$

celles à la surface sont à-peu-près,

$$V = 9;\ V = 16;\ V = 25;\ V = 36;\ V = 49;$$

ce qui donne, à vue, la relation $V = (W^{\frac{1}{2}} + 1)^2$, le pouce étant l'unité linéaire. Je pense, d'après ce rapprochement, que

la deuxième formule de l'article 191 présente, entre certaines limites de vîtesse, une exactitude suffisante pour les cas ordinaires de pratique.

L'équation $U = \frac{1}{2}(V + W)$, que *Dubuat* déduit aussi de quelques-unes de ses expériences, a le mérite d'exprimer une loi fort simple; mais, en la combinant avec la précédente, on arrive à la première de l'article 191, dont les conséquences sont incompatibles avec l'observation, puisqu'elle dit qu'en faisant la vîtesse à la surface, égale à zéro, la vîtesse moyenne conserve une valeur finie.

193. Une relation quelconque entre ces vîtesses, qui ne les rend pas nulles toutes deux ensemble, est évidemment erronée; de plus, on peut s'assurer, et par l'examen des résultats des expériences, et par la considération immédiate de la nature des phénomènes, que le rapport entre ces mêmes vîtesses approche d'autant plus du rapport d'égalité qu'elles sont plus grandes, en sorte qu'on a, à une limite, $V = 0$, $U = 0$, et à l'autre limite, $V = \infty$, $U = \infty$, $V = U$.

194. J'ai cherché si l'on pouvait aisément satisfaire à ces diverses conditions par une formule qui au mérite de la simplicité réunît celui d'être adaptée à la nature des phénomènes, et de les représenter avec toute l'exactitude que les expériences comportent; et j'ai trouvé qu'une équation de la forme $U = \frac{V(V + a)}{V + b}$ jouissait, sous ces divers points de vue, des propriétés demandées.

Il est manifeste d'abord que $V = 0$ donne $U = 0$, et que $V = \infty$ donne $U = V = \infty$: ainsi toutes les valeurs positives, et croissantes ou décroissantes, de V, répondent à des valeurs positives de U respectivement croissantes ou décroissantes. Les phénomènes ne comportant aucune valeur négative de V, il est inutile de s'en occuper; car dans la question dont il s'agit ici, comme dans toutes les questions soumises au calcul, on doit, parmi les diverses valeurs abstraites que fournit l'analyse, rejeter celles qui se trouvent étrangères au problème dont on a cherché la solution.

Mettant l'équation $U = \frac{V(V+a)}{V+b}$ sous la forme $\frac{V}{V-U} = \frac{b}{b-a} + \frac{V}{b-a}$, et faisant $\frac{b}{b-a} = \alpha$, $\frac{1}{b-a} = \beta$, on trouve, par la méthode de l'article 156, en comparant la formule avec les valeurs observées de V et U, consignées dans les colonnes 2 et 3 du Tableau (n.° 4), ou de celui (n.° 5); on trouve, dis-je,

$$\alpha = 4{,}036; \quad \beta = 1{,}280;$$

d'où . . . . $a = 2{,}37187$; $b = 3{,}15312$;

et la formule résultante

$$U = \frac{V(V+2{,}37187)}{V+3{,}15312},$$

a, sur celle de *Dubuat* (la première de l'article 191), le double avantage d'être plus expéditive et plus commode pour le calcul, et de représenter plus fidèlement les expériences d'après lesquelles les constantes de l'une et de l'autre formule ont été évaluées.

Le Tableau (n.° 5) offre la preuve de ces assertions: on y voit, colonnes 2 et 3, les vîtesses *à la surface* et *moyennes*, immédiatement données par dix-sept expériences très-soignées, dont quatorze, entre autres, sont mises, par *Dubuat*, au rang des meilleures qu'il ait faites; la colonne 4 contient ces mêmes vîtesses moyennes déduites de celles à la surface par la formule précédente; et si l'on veut se donner la peine de comparer les colonnes 6 et 7 de différences absolues, et sur-tout celles 8 et 9 de différences proportionnelles (qui donnent la vraie mesure des erreurs) du Tableau (n.° 5), avec les colonnes 6, 7, 8 et 9 du Tableau (n.° 4), on trouvera à ma formule la supériorité de fidélité et d'exactitude pour représenter les observations, non-seulement sur celle de *Dubuat* (art. 191), mais en général sur celles dont les vérifications sont consignées dans les quatre premiers Tableaux. Je ne pense pas qu'on puisse lier les nombres des colonnes 2 et 3 (Tableaux n.os 4 et 5) par une loi plus analogue aux relations naturelles qu'ils ont entre eux.

195. La Table première, qui donne, à vue, la vîtesse *moyenne*

correspondante à une vîtesse *à la surface*, moindre que 3 mètres, et réciproquement, a été calculée d'après l'équation de l'article précédent, et cette Table a toute l'exactitude que les données expérimentales actuelles comportent : mais l'examen de ma formule m'a suggéré une règle pratique de calcul que je ne dois pas omettre ici, parce que, d'une part, elle est extrêmement facile à fixer dans la mémoire, et que, de l'autre, elle peut, dans presque tous les cas, dispenser de l'usage de l'équation de l'article 194 ou de la Table première. Si l'on prend différentes valeurs du rapport $\frac{V + 2,37187}{V + 3,15312}$ depuis $V = 0$ jusqu'à $V = 3$ mètres, on trouvera qu'elles diffèrent peu de 0,8 ; et en effet on a,

pour $V = 0$ le rapport correspondant = 0,75 ;
$V = 1$ .... 0,81 ;
$V = 2$ .... 0,85 ;
$V = 3$ .... 0,87 ;

ce qui fait voir qu'on peut, dans les limites de vîtesse de 0 mètre à 3 mètres, représenter les observations, sans s'exposer à de grandes erreurs, par une équation de la forme $U = \alpha\ V$, la valeur de α ne devant pas différer beaucoup de 0,8. Si donc on compare cette équation avec la totalité des observations des colonnes 2 et 3 (Tableaux n.os 4 et 5), pour déterminer α par une méthode analogue à celle de l'article 156, on trouvera

$$\alpha = 0,816458 ;$$

ce qui donne l'équation $U = 0,816458 . V$, avec laquelle on a calculé les vîtesses de la colonne 5 du Tableau (n.° 4). Ces vîtesses s'écartent un peu plus des vîtesses observées que celles de la colonne 4 du Tableau (n.° 5) ; mais on verra, avec quelque surprise, qu'elles sont plus conformes aux expériences que les vîtesses de la colonne 4 du Tableau (n.° 4), calculées par la formule de *Dubuat* de l'art. 191, ainsi qu'on peut s'en assurer par les colonnes des différences.

Pour achever d'établir la confiance que mérite la règle de calcul

$U = 0,816458 \cdot V$ (qu'on peut réduire à $U = 0,82\ V$, ou même à $U = \frac{4}{5}\ V$), j'observe qu'elle a deux coïncidences avec celles de l'article 194, respectivement correspondantes à $V = 0$ et $V = 1^{m},1035$, entre lesquelles le *maximum* d'écart, qui répond à $V = 0^{m},5103$ n'est que $0^{m},015$ (ou de $\frac{1}{34}$ de V).

Les erreurs de la formule $U = 0,816458\ V$ sont par excès entre les deux coïncidences dont je viens de parler, après quoi elles changent de signe, et sont par défaut depuis $V = 1,1035$ jusqu'à $V = \infty$; de telle sorte qu'on a, pour $V = 1^{m},5$,

Équation de l'article 194....................	$U =$ 1,248.
Équation de l'article 195....................	$U =$ 0,816.
Excès du premier résultat sur le deuxième.......	0,023.

Pour $V = 2$ mètres on a,

Équation de l'article 194....................	$U =$ 1,697.
Équation de l'article 195....................	$U =$ 1,633.
Excès du premier résultat sur le deuxième.......	0,064.

Enfin pour $V = 3$ mètres,

Équation de l'article 194....................	$U =$ 2,619.
Équation de l'article 195....................	$U =$ 2,449.
Excès du premier résultat sur le deuxième.......	0,170.

La formule $U = 0,816458\ V$ donne, dans le premier cas, une vîtesse moyenne moindre que celle calculée par la formule de *Dubuat*, d'environ $\frac{1}{55}$ de la vîtesse à la surface; pour 2 mètres de vîtesse, cette différence serait $\frac{1}{26}$, et pour 3 mètres, entre $\frac{1}{16}$ et $\frac{1}{17}$. Il est inutile, pour la presque totalité des cas de pratique, de s'occuper de vîtesses plus considérables : ainsi la règle de calcul simplifiée que je propose, est vraiment susceptible d'une application utile. En général, quelles que soient U et V, la différence entre les deux formules ne peut jamais excéder $\frac{1}{5}$ de V; c'est la valeur qu'elle prend lorsque la vîtesse à la surface est infinie.

196. Quelque satisfaisant que soit l'accord entre la formule de l'article 194 et l'expérience, je dois cependant faire remarquer une circonstance qui peut faire regarder cette formule comme une simple règle de calcul empirique, et qui tient à ce que les observations semblant indiquer qu'on peut déterminer *U* par *V* indépendamment de la figure, de la grandeur, de la pente, &c. du canal, elle n'en tient aucun compte : il est cependant difficile de se persuader que ces divers élémens n'aient aucune influence sur les relations entre *V*, *W* et *U*. Mais il fallait pourvoir, d'abord, aux besoins de la pratique, par des règles suffisamment exactes pour les cas qu'elle a à traiter; et la recherche des lois générales et rigoureuses auxquelles les phénomènes sont assujettis, offre encore un problème où les géomètres et les physiciens trouveront à s'exercer sur des objets dignes de leur attention et de leur intérêt.

§. XVI.

Application de trente-une expériences faites sur le mouvement des eaux dans les canaux découverts, naturels et factices, à la détermination générale des rapports qui existent entre la longueur, la pente, la section transversale, le périmètre de cette section et la vîtesse de l'eau, en ayant égard aux forces retardatrices dues au frottement et à la viscosité.

197. Le rapprochement préliminaire, qu'offre le paragraphe XIII, des résultats de la théorie et de ceux des expériences faites sur quelques canaux découverts, m'a conduit à une détermination des rapports entre les longueurs, les pentes, les sections, &c. dont on peut faire un usage utile dans la pratique.

Mon objet principal, en n'embrassant d'abord qu'une petite partie des excellentes expériences de *Dubuat*, était de comparer sa formule avec celle de l'ingénieur *Girard*, qui est établie sur les douze expériences rapportées dans le paragraphe cité, et avec celle qu'on

obtient en ne faisant d'avance aucune hypothèse sur les valeurs absolues ou relatives des coefficiens α et ζ de l'expression $\alpha U + \zeta U^2$.

Les huit expériences que j'ai adoptées, et dont je me suis servi exclusivement aux quatre qui, sur les douze susmentionnées, sont reconnues anomales, ont le grand avantage d'être faites sur une rigole, un canal et une rivière qui offrent des sections beaucoup plus grandes que vingt-trois autres expériences faites sur des canaux factices, et, par conséquent, de se rapporter d'une manière plus immédiate aux applications pratiques; et je regarde, d'après ces considérations, les déterminations consignées dans les articles 164, 165, 166 et 167, comme fournissant des règles usuelles de calcul très-bonnes à être employées dans les constructions hydrauliques.

Mais, d'une part, les vingt-trois dernières expériences dont je viens de parler, sont exécutées avec une exactitude précieuse; et, de l'autre, elles présentent une circonstance très-remarquable, celle de donner la *vîtesse moyenne* par le *fait,* au lieu que, dans les huit expériences du paragraphe XIII, la *vîtesse moyenne* n'a pas été mesurée immédiatement, mais déduite de la vîtesse observée à la surface, par la formule de *Dubuat* rapportée (art. 191).

198. Il était donc important de connaître les relations générales entre la longueur, la pente, la section, &c. d'un canal, qui résultent de ces vingt-trois expériences, afin d'arriver à la connaissance des coefficiens α et ζ sans mêler aux données de *fait* aucun élément déduit de considérations empiriques.

Cependant, comme l'application à la pratique est l'objet principal de ces recherches, qu'on pourrait soupçonner les conclusions tirées du mouvement de l'eau dans de petits canaux factices, de n'être pas applicables à de grands canaux, et que d'ailleurs il importe de savoir jusqu'à quel point les résultats auxquels on parvient conviennent aux petites ou aux grandes dimensions, j'ai cru nécessaire de combiner avec les vingt-trois expériences publiées *tome II*, *pages*

pages 67 et 68, des Principes d'hydraulique de *Dubuat,* les huit faites sur la rigole de Courpalet, sur le canal du Jard et sur la rivière de Hayne, dont sept sont tirées du même ouvrage.

199. L'embarras était d'assigner, pour ces huit expériences, des vîtesses moyennes d'une exactitude sensiblement comparable à celle obtenue dans les vingt-trois expériences auxquelles on les réunissait. Quatorze de celles-ci ont servi à *Dubuat* à établir la relation entre la vîtesse à la surface et la vîtesse moyenne, exprimée par la première équation de l'article 191 ; et j'ai commencé les opérations de calcul que prescrit la méthode des articles 156 et suivans, par la formation d'un tableau où les valeurs de $\frac{g\omega\zeta}{\lambda\chi U}$, données immédiatement par les vingt-trois expériences, se trouvaient mêlées avec leurs analogues, relatives aux huit autres, en calculant le facteur U du dénominateur par la formule de *Dubuat.* Mais j'ai reconnu aussitôt que les cinq premières de ces huit valeurs, ainsi calculées, étaient *hors de ligne* par rapport aux vingt-trois conclues de l'observation ; ce dont on pourra s'assurer, en substituant aux nombres de la colonne 5 du Tableau (n.° 3), placés vis-à-vis de ceux de la colonne 7 du même Tableau, les valeurs de y du Tableau de l'article 162, qui ne répondent pas aux expériences anomales marquées d'une étoile, les nombres de la colonne 7 du Tableau (n.° 3) étant d'ailleurs rangés entre eux dans le même ordre que leurs correspondans à l'article 162 ; et pour qu'on puisse s'assurer par le témoignage même de ses yeux, que les nombres dont je parle sont vraiment *hors de ligne,* j'ai tracé sur la *planche 2 (n.° 2)* les ordonnées égales à y et correspondantes aux abscisses U de l'article 162 : elles répondent aux angles du polygone ponctué *klmnp.* Il est visible que les cinq premières de ces ordonnées sont trop grandes par rapport à celles du polygone non ponctué qui sont immédiatement déduites de l'observation, et que, par conséquent, les vîtesses U conclues par la première formule de l'article 191 sont trop petites ; ce dont on se rendra aisément raison en réfléchissant sur le contenu du §. XV.

Si l'on examine maintenant les nombres 1, 4, 5, 6 et 10 de la colonne 5 du Tableau (n.° 3), déduits des valeurs de *U*, calculées par la formule de l'article 194, ou les ordonnées correspondantes *(planche 2, n.° 2)*, on verra que ces nombres ou ces ordonnées ne présentent pas, par rapport à ceux calculés d'après des données d'observation immédiate, de plus grandes irrégularités ou anomalies, que ces nombres d'expérience eux-mêmes n'en offrent entre eux; on peut donc regarder les uns et les autres comme susceptibles d'être rangés sous une loi commune.

Quant aux trois expériences restantes sur les huit susmentionnées, elles offrent, calculées soit par la formule de l'article 191, soit par celle de l'article 194, des vîtesses qui se lient à-peu-près également bien à celles d'observation; mais la formule de l'article 194 ayant été appliquée à cinq sur huit, l'uniformité exigeait qu'on l'appliquât aussi aux trois autres.

200. En ayant égard à ces considérations, et se servant, pour plus de facilité et d'exactitude, de la méthode des articles 156 et suivans, on trouve que pour satisfaire aux trente-une expériences dont les résultats sont consignés dans le Tableau (n.° 3), il faut, en posant l'équation $\alpha U + \beta U^2 = \frac{g\omega\zeta}{\lambda\chi}$, faire

$$\alpha = 0{,}000436; \qquad \beta = 0{,}003034.$$

201. Et pour une valeur donnée de $\frac{\omega}{\chi} \cdot \frac{\zeta}{\lambda}$ ou RI, on a

$$U = -0{,}0718523 + \sqrt{[0{,}00516275 + 3232{,}96 \,.\, RI]}.$$

202. Ou plus simplement,

$$U = -0{,}07 + \sqrt{[0{,}005 + 3233 \,.\, RI]}.$$

203. On voit, par les résultats moyens des colonnes 9 et 10 du Tableau (n.° 3), que les vîtesses calculées par cette formule s'écartent de celles données par l'expérience, de + 0,03 et — 0,03 en différences absolues, de + 0,07 et — 0,07 en différences proportionnelles (en se bornant aux décimales du deuxième ordre). Cette égale répartition des anomalies est remarquable; elle prouve

que les résultats conclus tiennent un juste milieu entre ceux observés ; et je pense, en effet, que l'équation de l'article 201 est ce qu'on a donné, jusqu'à présent, de plus exact pour représenter les phénomènes et servir aux applications pratiques.

§. XVII.

Comparaison des formules précédemment obtenues pour représenter le mouvement des eaux dans les tuyaux de conduite et les canaux découverts ; formule unique qui représente ce mouvement dans les uns et dans les autres, avec une exactitude suffisante pour la pratique.

204. Je vais faire le rapprochement des formules auxquelles je suis parvenu dans les paragraphes XIV et XVI.

L'expression générale de la résistance étant $\lambda\chi(\alpha U+\beta U^2)$, j'ai trouvé,

Pour les tuyaux de conduite (art. 182),

$$\alpha=0{,}00017;\ \beta=0{,}00342;$$

Pour les canaux découverts (art. 200),

$$\alpha=0{,}00044;\ \beta=0{,}00303.$$

Le coefficient de la partie de la résistance qu'on regarde comme dépendante de la cohésion, est plus petit dans les tuyaux que dans les canaux découverts ; et celui de l'autre partie, qu'on attribue aux aspérités, et qui est l'espèce de *frottement* dont les fluides peuvent être susceptibles, est au contraire plus petit dans les canaux que dans les tuyaux.

205. Pour que ces deux parties de la résistance totale soient égales entre elles dans un même tuyau ou un même canal, il faut qu'on ait :

$$\text{Tuyaux (art. 182)...}\quad U=\frac{17^{m.}}{342''}=0^{m},05.$$

$$\text{Canaux (art. 200)...}\quad U=\frac{44^{m.}}{303''}=0^{m},15.$$

Ainsi, dès que la vîtesse excède $0^m,05$, le terme proportionnel à U^2 est, dans les tuyaux, plus grand que celui proportionnel à U; et il paraît que, dans les canaux, la prépondérance de l'un sur l'autre ne doit commencer qu'à une vîtesse à-peu-près triple de la précédente.

206. Ces rapprochemens portent sur des phénomènes hypothétiques, qui sont censés avoir lieu dans les très-petites vîtesses, et qui fournissent des conclusions affectées des erreurs possibles des principes systématiques par lesquels on explique la résistance. Envisageant maintenant les choses sous le point de vue qui intéresse la pratique, l'attention se porte naturellement sur les causes des différences entre les valeurs α et celles β, dans les formules qui se rapportent respectivement aux canaux et aux tuyaux : la formule relative aux canaux est fondée sur un grand nombre d'expériences offrant des combinaisons très-variées; ce qui établit en sa faveur une probabilité d'exactitude plus forte encore que celle qu'on a en faveur de la première. De plus, en comparant l'équation de l'article 165, et établie sur huit expériences seulement, dans lesquelles les vîtesses moyennes sont conclues, avec celle de l'article 200, établie sur trente-une expériences, dans vingt-trois desquelles la vîtesse moyenne est immédiatement observée (cette vîtesse étant, pour les huit autres, calculée avec plus d'exactitude que dans le premier cas), on est frappé de voir qu'à mesure que les données de fait deviennent plus nombreuses et plus exactes, les formules qui se rapportent aux canaux tendent à devenir identiques avec celles qui se rapportent aux tuyaux; et cette convergence fait naturellement soupçonner qu'on pourrait, par une seule équation, représenter l'ensemble des phénomènes du mouvement de l'eau, quelle que soit la nature des parois qui la renferment.

Cependant, quand on examine avec la plus scrupuleuse attention les résultats consignés dans les Tableaux 2 et 3, et leur représentation graphique sur la planche 2, il est manifeste que ces résultats, quoique susceptibles d'être exprimés par des fonctions de même

forme, nécessitent quelques différences dans les constantes; en sorte que si l'on voulait faire AB (n.° 1) $=$ ab (n.° 2), et *angle* HBG (n.° 1) $=$ *angle* dbg (n.° 2); on serait forcé de sacrifier, jusqu'à un certain point, à ces égalités, la juste répartition, en plus et en moins, des anomalies; et comme les expériences sur lesquelles les valeurs de l'article 200 sont fondées, quoique moins nombreuses, ont le mérite d'une exactitude précieuse et d'un grand accord entre elles, les faits connus semblent annoncer que les différences entre les constantes tiennent à la nature même des phénomènes.

207. J'ai parlé du sacrifice qu'on ferait à la juste répartition des anomalies, en substituant une seule formule à celles des articles 183 et 200, et il est bon de connaître le degré de précision dont cette formule unique pourrait être susceptible. Pour cela, je prends une série de vîtesses moyennes, comprises dans les limites de celles sur lesquelles j'ai des expériences, c'est-à-dire, depuis $0^m,04$ jusqu'à $2^m,24$ environ, et je forme la table suivante:

VITESSES MOYENNES.	VALEURS DE $aU+cU^2$. FORMULE de l'art. 200. CANAUX DÉCOUVERTS.	FORMULE de l'art. 183. TUYAUX DE CONDUITE.	DIFFÉRENCES ENTRE LES VALEURS CI-À CÔTÉ.
mètres. 0,04.	0,000002.	0,000001.	+ 0,000001.
0,26.	0,000032.	0,000028.	+ 0,000004.
0,48.	0,000093.	0,000089.	+ 0,000004.
0,70.	0,000183.	0,000183.	— 0,000000.
0,92.	0,000303.	0,000311.	— 0,000009.
1,14.	0,000453.	0,000472.	— 0,000019.
1,36.	0,000633.	0,000668.	— 0,000035.
1,58.	0,000842.	0,000897.	— 0,000059.
1,80.	0,001082.	0,001160.	— 0,000078.
2,02.	0,001352.	0,001456.	— 0,000104.
2,24.	0,001652.	0,001786.	— 0,000134.

Les deux formules qui coïncident lorsque $U=0$, ont une autre coïncidence correspondante à $U=0{,}70$, ou plus exactement à $U=0{,}696335$ (résultat donné par l'équation $170\,U+3416\,U^2 = 436\,U+3034\,U^2$); et leur différence, correspondant à la plus grande vîtesse observée, est de $\frac{1}{13}$ environ de ce que donne celle de l'article 183, fondée sur le plus grand nombre d'expériences. Pour avoir maintenant une formule qui s'écarte le moins possible de l'une et de l'autre, il faut, en conservant les deux coïncidences, partager en deux la différence extrême; et ces conditions seront remplies en déterminant α et ζ par les équations :

208... $\alpha.\frac{266}{382}+\zeta.\left(\frac{266}{382}\right)^2=\frac{266}{382}\times 0{,}00017+\left(\frac{266}{382}\right)^2\times 0{,}003416$;

$$\frac{\alpha}{g}.2{,}24+\frac{\zeta}{g}.(2{,}24)^2=\tfrac{1}{2}\,(0{,}00178625+0{,}00165159);$$

desquelles on déduit,

$$\alpha=0{,}00030298\,;\qquad \zeta=0{,}00322502.$$

Ces valeurs sont presque exactement moyennes arithmétiques entre celles des articles 182 et 200, comme on devait s'y attendre.

209. Si l'on désigne par G l'une ou l'autre des quantités RI, ou $\frac{1}{4}\,Dj$, on aura

$$0{,}00030298\,U+0{,}00322502\,U^2=gG.$$

210. Et l'on déduit de cette équation,

$$U=-0{,}0469734+\sqrt{[0{,}0022065+3041{,}47\,G]}.$$

Cette formule a certainement toute l'exactitude nécessaire dans la pratique, et elle s'applique indistinctement aux canaux et aux tuyaux. On pourrait en former une Table pour faciliter les calculs numériques; mais il vaut mieux se servir de celle (n.° 2) placée à la suite de ces *Recherches*, qui contient les valeurs de RI et de $\frac{1}{4}\,Dj$ correspondantes aux valeurs de U, prises de centimètre en centimètre, depuis $0^m{,}01$ jusqu'à $3^m{,}00$, et calculées immédiatement d'après les formules des articles 200 et 183. J'ai eu moins en vue, dans ce paragraphe, de ramener les calculs d'application à l'emploi d'une

formule unique, que d'examiner jusqu'à quel point les phénomènes rendaient cette simplification praticable.

§. XVIII.

Problèmes pratiques relatifs au mouvement de l'eau dans les tuyaux de conduite.

211. Je me propose d'ajouter quelques règles pratiques à celles démontrées dans les paragraphes précédens; et je vais d'abord introduire dans les formules qui donnent la vîtesse, la valeur du volume d'eau qui passe par une section quelconque pendant l'unité de temps.

Le mouvement étant supposé parvenu à l'uniformité, la vîtesse de l'eau, dans un tuyau cylindrique, est (art. 183) donnée par l'équation,

$$\alpha U + \beta U^2 = \tfrac{1}{4} g j D;$$

α et β sont des constantes absolues qui ont pour valeur,

$$\alpha = 0{,}00017; \quad \beta = 0{,}003416.$$

212. Si l'on désigne par Q la dépense de chaque section du tuyau pendant l'unité de temps, et qu'on fasse $3{,}1416 = \pi$, on aura $U = \frac{4\,Q}{\pi\,D^2}$.

213. Cette valeur substituée dans l'équation de l'article 211 donne $\alpha + \frac{4\,\beta\,Q}{\pi\,D^2} = \frac{\pi\,g\,j\,D^3}{16\,Q}$, d'où en faisant $\frac{16\,\alpha}{\pi\,g} = \alpha'$; $\frac{64\,\beta}{\pi^2\,g} = \beta'$;

$$j\,D^5 - \alpha'\,Q\,D^2 - \beta'\,Q^2 = 0;$$

les valeurs numériques des constantes α' et β' sont

$$\alpha' = 0{,}000088268; \quad \beta' = 0{,}002258305;$$

et l'on a la relation entre le diamètre du tuyau et sa dépense, lorsque la longueur, la pente, les charges d'eau, &c. se trouvent d'ailleurs

déterminées par les conditions particulières de la question. La Table 3 servira à abréger et à faciliter considérablement les calculs de D par Q; on peut aussi se servir avec beaucoup d'avantage de la Table 2 pour ces calculs. Après s'être assuré, ce qui est fort aisé, de deux limites, en plus et en moins, entre lesquelles se trouve la valeur cherchée de D, on fera un petit tableau des valeurs de $\frac{1}{4} j D$, dans lequel on entrera par des valeurs de D prises entre ces limites, et l'on substituera les vîtesses tirées de la Table 2, correspondantes à chacun des nombres de ce petit tableau, dans l'expression $\frac{1}{4} \pi D^2 U$, jusqu'à ce qu'on en ait trouvé deux valeurs successives, l'une plus petite et l'autre plus grande que le nombre Q, donné par l'état de la question : la vraie valeur de D sera intermédiaire entre celles qui répondent à ces deux valeurs ; et par des calculs de fausse position, on en approchera d'aussi près qu'on voudra.

214. L'équation de l'article précédent fournit immédiatement le moyen de résoudre un problème de pratique qui peut être fort utile, et dont la solution, si l'on n'avait pas égard aux circonstances physiques que j'ai introduites dans l'analyse, pourrait entraîner dans des erreurs graves.

Un réservoir supérieur de distribution est alimenté par un courant de manière à pouvoir fournir, sans que sa profondeur diminue, une quantité totale Q d'eau par jour, qu'il s'agit de répartir à des fontaines ou à des bassins inférieurs, par le moyen de tuyaux de conduite, dans des rapports donnés qu'on suppose être ceux des nombres n', n'', n''', &c.

Nommant Q', Q'', Q''', &c. les quantités d'eau respectives qui arriveront aux fontaines ou aux bassins, en s'assujettissant à la condition précédente, on aura d'abord $Q' = \frac{n'}{n' + n'' + \&c.} Q$; $Q'' = \frac{n''}{n' + n'' + \&c.} Q$; &c.

Ensuite D', D'', &c. étant les diamètres respectifs de ces tuyaux,

et

et j', j'', &c. les données relatives à leurs établissemens, on déterminera chaque diamètre, en particulier, par les équations,

$$j' D'^5 - \alpha' Q' D'^2 - \zeta' Q'^2 = 0;$$
$$j'' D''^5 - \alpha' Q'' D''^2 - \zeta' Q''^2 = 0.$$
&c.

215. Voici maintenant un emploi très-important que la mécanique pratique peut faire des déterminations précédentes sur la résistance au mouvement de l'eau qui a lieu dans les tuyaux. Les machines hydrauliques destinées à élever de l'eau, opèrent le plus souvent cette élévation, sur-tout lorsque la hauteur est considérable, en refoulant le fluide dans des tuyaux de conduite. Ainsi leur effet consiste à faire mouvoir l'eau, avec une certaine vîtesse, dans des tuyaux dont les pentes totales et les longueurs sont déterminées par des circonstances locales; j'ajouterai que la perfection du mécanisme exige qu'on le dispose de manière que, pendant le jeu de la machine, l'eau ne passe point alternativement du mouvement au repos. Or, dans le calcul de l'effet de ces machines, l'effort auquel celui du moteur doit continuellement faire équilibre, se compose, 1.° du poids d'une colonne d'eau dont la base est ordinairement celle d'un piston, et dont la hauteur est la différence de niveau entre le réservoir inférieur et le bassin supérieur; 2.° de plusieurs résistances provenant de l'inertie des masses qui ont un mouvement alternatif, et des frottemens des pistons, axes, tourillons, &c.; 3.° enfin de la résistance au mouvement de l'eau qui a lieu dans le tuyau.

Cette dernière résistance est ordinairement omise dans les calculs des effets des machines, quoiqu'elle influe très-sensiblement sur le produit, parce qu'on n'en a eu jusqu'à présent aucune évaluation certaine susceptible d'être aisément employée dans le calcul. C'était donc une question importante et nouvelle, dont les recherches contenues dans cet écrit donnent la solution avec toute la simplicité et l'exactitude nécessaires à la pratique. *D* étant le diamètre de

la conduite dans laquelle on refoule l'eau, D' le diamètre du piston, λ la longueur de la conduite, ζ la hauteur de l'élévation, et Q la quantité d'eau qui doit être élevée à cette hauteur pendant l'unité de temps, la vîtesse de l'eau est $\frac{4Q}{\pi D^2}$ (π est la demi-circonférence dont le rayon $= 1$); et la pression sur la base du piston, provenant tant du poids que du *mouvement* du fluide, c'est-à-dire la somme des 1.re et 3.e résistances énumérées ci-dessus, a pour valeur, la densité de l'eau étant supposée $= 1$,

$$\tfrac{1}{4} g \pi D^2 \zeta + \frac{4\lambda Q}{D}\left(a + \frac{4b}{\pi} \cdot \frac{Q}{D^2}\right);$$

expression dans laquelle se trouvent les constantes absolues,

$$a = 0{,}00017; \quad b = 0{,}003416.$$

On a d'ailleurs de très-bonnes expériences pour évaluer les résistances dues aux frottemens : ainsi il n'y a plus rien d'inconnu, ou d'arbitraire, dans les élémens du calcul de la machine hydraulique.

Je pense que les mécaniciens verront le résultat précédent avec d'autant plus de satisfaction, qu'il est fondé sur des expériences nombreuses et exactes, et que rien d'équivalent n'a encore été publié, du moins à ma connaissance.

§. XIX.

Problèmes pratiques relatifs au mouvement de l'eau dans les canaux découverts à pente uniforme.

216. Je continue à désigner par Q le volume constant d'eau qui passe par la section transversale ω pendant chaque unité de temps, et j'ai les deux équations,

$$a\,U + b\,U^2 = g\,I\,R;$$

$$U = \frac{Q}{\omega}.$$

Les valeurs des constantes a et b sont (art. 200),

$$a = 0{,}000436; \quad b = 0{,}003034.$$

Et l'on en déduit,

$$\frac{\alpha}{g} = 0{,}0000444499\,; \qquad \frac{\beta}{g} = 0{,}000309314.$$

217. Éliminant U entre les deux équations précédentes, il vient

$$R\,\omega^2 - \frac{\alpha\,Q}{g\,I}\,\omega - \frac{\beta\,Q^2}{g\,I} = 0.$$

218. Cette équation contient quatre quantités, ω, χ, I et Q (on a $R = \frac{\omega}{\chi}$), qui peuvent, dans différentes circonstances, avoir différens rapports entre elles; et la vîtesse parvient à l'uniformité lorsque leurs valeurs respectives sont telles, que, substituées dans $\frac{g\,I\,\omega^3}{\chi} - \alpha\,Q\,\omega - \beta\,Q^2$, elles réduisent cette expression à zéro : on ne peut se donner, *à priori,* que trois de ces quantités, et la quatrième doit être déterminée de manière à satisfaire à l'équation qui exprime leurs relations. Ainsi, lorsque la pente et le produit d'eau sont fixés d'avance, on peut encore assigner à la surface de la section transversale une valeur convenue; mais on est assujetti à faire cette section d'une forme telle, que son périmètre soit égal à $\frac{g\,I\,\omega^3}{\alpha\,Q\,\omega + \beta\,Q^2}$.

219. Pareillement, pour faire passer un produit d'eau donné par une section aussi donnée tant en grandeur qu'en figure, il faut chercher la pente convenable par l'équation $I = \frac{\chi(\alpha\,Q\,\omega + \beta\,Q^2)}{g\,\omega^3}$.

220. Si, avec une pente et un produit d'eau déterminés, on se donne d'avance la valeur absolue du rayon moyen R, ce qui est assez convenable dans les canaux de dérivation uniquement destinés à conduire l'eau d'un lieu dans un autre, Q, I et R étant alors les données du problème, on a d'abord

$$\omega = \frac{\alpha \pm \sqrt{[(\alpha^2 + 4\beta\,g\,R\,I)]}}{2\,g\,R\,I}\,.\,Q.$$

221. Supposons ensuite, ω étant déduit de l'équation précédente, que le canal est construit de manière à pouvoir donner au profil transversal la forme d'un parallélogramme dont x et y seraient respectivement la base et la hauteur : on aura

$$xy = \omega;\ x + 2y = \frac{\omega}{R}.$$

On tire de la combinaison de ces deux équations,

$$1.^{\circ} \ldots\ldots x = \frac{\omega \pm \sqrt{[\omega(\omega - 8R^2)]}}{2R};$$

$$2.^{\circ} \ldots\ldots y = \frac{\omega}{x}.$$

222. Si le profil transversal est un trapèze, désignant par ny la base du talus, et faisant $\sqrt{[1 + n^2]} = n'$, on aura

$$(x + ny)y = \omega;\ x + 2n'y = \frac{\omega}{R},$$

et l'on tire de la combinaison de ces deux équations, en faisant $2n' - n = n''$,

$$1.^{\circ} \ldots\ldots y = \frac{\omega \pm \sqrt{[\omega(\omega - 4R^2 n'')]}}{2Rn''};$$

$$2.^{\circ} \ldots\ldots x = \frac{\omega}{R} - 2n'y.$$

223. On peut, au lieu de se donner la valeur absolue du *rayon moyen R*, se donner celle de la surface ω de la section transversale, Q et I étant toujours des valeurs connues. Dans ce cas, R est une inconnue qu'on déduit de l'équation de l'article 217,

$$R = \frac{Q}{g\omega I}\left(a + \frac{6Q}{\omega}\right).$$

Lorsque R est ainsi déterminé, si la section doit avoir une forme parallélogrammique, on détermine sa base et sa hauteur par les équations de l'article 221 ; et si cette section doit être un trapèze, les côtés de ce trapèze se calculent par les équations de l'article 222.

224. *Le rayon moyen R* a pour valeur $\frac{\omega}{\chi}$, et la vraie inconnue

est ici le périmètre χ; en sorte que l'équation précédente peut se mettre sous la forme,

$$\chi = \frac{gI\omega^2}{(\alpha\omega + \mathit{6}Q)Q}.$$

225. Lorsqu'il s'agit d'un canal de navigation à pente, la figure et la grandeur de la section transversale ω doivent être établies d'après les dimensions et le tirant d'eau des bateaux; alors R et ω sont des quantités données, et il s'agit d'avoir un produit Q d'eau, coulant sur une pente I, tel, que les valeurs de Q et de I satisfassent à l'équation de l'article 217. On a ainsi un moyen sûr et simple, 1.° de vérifier la possibilité du projet, ou de reconnaître si la section transversale dont on a besoin est compatible avec la quantité d'eau disponible et avec la pente qu'on peut donner au canal; 2.° dans le cas où, à cet égard, les conditions demandées seraient remplies, de combiner ensemble les divers élémens du projet de la manière la plus avantageuse.

226. L'espèce de canal dont je viens de parler, présente une question importante, celle d'examiner quelle profondeur aura l'eau, lorsque le produit Q et la pente I seront donnés avec la largeur du fond et l'inclinaison des côtés du profil transversal, qu'on suppose avoir la figure d'un trapèze.

La base du profil étant b, et les autres quantités qui en dépendent étant les mêmes qu'à l'article 222, on a

$$\omega = (b + ny)y; \; R = \frac{(b + ny)y}{b + 2n'y}.$$

Ces quantités substituées dans l'équation de l'article 217, la changent en

$$\frac{(b + ny)^3 y^3}{b + 2n'y} - \frac{\alpha Q}{gI}(b + ny)y - \frac{\mathit{6}Q^2}{gI} = 0;$$

équation numérique du sixième degré, dont on tirera la valeur de la profondeur y par les méthodes d'approximation connues, ou plus commodément par l'un des procédés pratiques de l'article suivant.

227. Si le profil donné, au lieu d'être un trapèze, est un parallélogramme, on a $n = 0$, $n' = 1$, et

$$g I b^3 y^3 - Q(b + 2y)(\alpha b y + \zeta Q) = 0,$$

équation qui n'est plus que du troisième degré.

Les calculs des deux équations précédentes, et sur-tout de celle de l'article 226, qui paraissent effrayans au premier coup-d'œil, se feront très-simplement, et avec une exactitude suffisante pour la pratique, au moyen d'un tracé graphique du profil transversal. Après s'être assuré, ce qui est fort aisé, de deux limites en plus et en moins entre lesquelles se trouve la valeur cherchée de la hauteur y, on tracera, entre ces limites, plusieurs parallèles à la base, et l'on formera (en s'aidant de la Table 4 ci-après) une petite table des distances de ces parallèles, à la base des aires des trapèzes correspondans et des périmètres (dans lesquels il ne faut pas comprendre les longueurs des parallèles). On substituera chacune des aires et de leurs périmètres à la place de ω et χ dans l'expression $\omega\left(R\,\omega - \frac{\alpha}{g} \cdot \frac{Q}{I}\right)$, jusqu'à ce qu'on ait deux résultats dont l'un soit plus grand et l'autre plus petit que $\frac{\zeta Q^2}{g I}$. La valeur de ω, qui satisfait à la question, et qui donne celle de y, sera intermédiaire entre ces deux résultats, et, par des calculs de *fausse position*, on en approchera aussi près qu'on voudra ; la parallèle à la base qui renfermera cette aire ω, représentera la surface de l'eau.

On peut encore, pour la détermination dont il s'agit, se servir très-utilement de la Table 2. Pour cela, au moyen des aires successives données par les diverses parallèles à la base et des périmètres correspondans, on fera une suite de produits $\frac{\omega I}{\chi}$ ou $R I$, et l'on multipliera les aires ω par les vîtesses U, correspondantes aux produits $R I$, ces vîtesses étant prises dans la Table 2, jusqu'à ce qu'on trouve deux valeurs de $U \omega$ consécutives, dont l'une soit plus grande et l'autre plus petite que Q : la valeur cherchée de y sera intermédiaire

entre celles qui répondent à ces deux valeurs; et, pour plus grande approximation, on pourra, si on veut, employer les fausses *positions* (1).

228. On pourrait, au lieu d'assigner la base du trapèze ou du parallélogramme, comme dans les deux articles précédens, demander que la section trapézoïde de la masse fluide fût semblable à un trapèze donné : alors on aurait $b = k'y$; $(b + 2n'y)k'' = y$, k' et k'' étant des nombres donnés, et l'équation de l'article 226 se changerait en

$$k''(k'+n)^3y^5 - \frac{\alpha Q}{gI}(k'+n)y^2 - \frac{\zeta Q^2}{gI} = 0.$$

---

(1) Voici un exemple de calcul. Supposons qu'on ait

$I = 0{,}0001$; $b = 3^m{,}5$;
$n = 1{,}5$; $Q = 3$ mètres cubes;

et qu'on veuille savoir à quelle profondeur l'eau se tiendra dans un canal dont la pente, le profil transversal, et le produit, par seconde, de chaque section, seraient conformes à ces données : on aura, en suivant le premier procédé indiqué dans le texte,

$$\frac{\zeta}{g} \cdot \frac{Q^2}{I} = 0{,}0003093 14 \times \frac{9}{0{,}0001} = 27{,}8383.$$
$$\frac{\alpha}{g} \cdot \frac{Q}{I} = 0{,}00004445 \times \frac{3}{0{,}0001} = 1{,}3335.$$

Construisant ensuite le profil d'après les valeurs de b et de n, et prenant les valeurs de ω et R, à partir d'un mètre de profondeur, on formera la table suivante :

PROFONDEUR. Mètre.	VALEUR de $\omega\left(R\omega - \frac{\alpha}{g} \cdot \frac{Q}{I}\right)$.
1,0	10,9245.
1,1	16,796.
1,2	24,389.
1,3	33,992.

Le résultat correspondant à $1^m{,}3$ étant plus grand que $27{,}838 = \frac{\zeta}{g} \cdot \frac{Q^2}{I}$, il est inutile de pousser la table plus loin, et l'on voit que la valeur de y est comprise entre $1^m{,}2$ et $1^m{,}3$. Les centimètres et millimètres se calculeront par la proportion,

$$33{,}992 - 24{,}389 : 1^m{,}3 - 1^m{,}2 :: 27{,}838 - 24{,}389 : x = 0{,}036.$$

Ainsi la profondeur y de l'eau dans le canal sera $= 1^m{,}236$.

On pourrait, en partant de cette valeur, faire des substitutions beaucoup plus serrées, et obtenir les 4.e, &c. décimales; mais il suffit, pour la pratique, d'avoir la 3.e ou même la 2.^{e}

Dans le cas du parallélogramme, on fera $n = 0$, et on appliquera d'ailleurs à cette équation les méthodes abrégées de calcul exposées dans l'article précédent.

229. Toutes les règles de calcul données depuis l'article 216, dérivent des deux équations,

$$\lambda \chi (\alpha U + \beta U^2) = g \omega \zeta;$$
$$Q = U \omega;$$

dont la première contient des coefficiens numériques α et β déterminés par plusieurs expériences : mais il est bon d'observer que la valeur de la résistance $\lambda \chi (\alpha U + \beta U^2)$ déduite de ces expériences, n'est pas applicable sans exception à toutes les parois des lits dans lesquels l'eau peut couler. Si ces parois sont couvertes de plantes aquatiques, la résistance augmente sensiblement; et cet effet a encore lieu s'il y a un certain nombre de bateaux stationnés sur le canal. On aura égard à cette augmentation de résistance, en substituant à la première des équations ci-dessus celle

$$\varkappa \lambda \chi (\alpha U + \beta U^2) = g \omega \zeta,$$

$\varkappa$ étant un coefficient plus grand que l'unité qui se détermine par des considérations particulières. L'ingénieur *Girard*, qui, je crois, a eu le premier l'idée d'employer ce coefficient de correction, en le considérant comme un multiplicateur du périmètre, l'a fait $= 1,7$. (*Voyez* son Rapport sur le canal de l'Ourcq, *page 53.*)

230. La constante $\varkappa$ étant ainsi introduite, on se servira des deux équations

$$\alpha U + \beta U^2 = \frac{g I R}{\varkappa};$$
$$Q = U \omega,$$

pour les mêmes déterminations auxquelles on a employé celles des articles 216 et 217.

§. XX.

§. XX.

Problèmes pratiques relatifs au mouvement de l'eau dans les canaux découverts à pente variable.

231. EXAMINONS maintenant le parti qu'on peut tirer, dans la pratique, des principes établis précédemment, dans le cas où un canal découvert n'a pas, dans le sens de sa longueur, une pente constante. L'application de ces principes pourra évidemment se faire avec avantage lorsque la pente totale sera divisée en plusieurs pentes partielles, d'une certaine longueur, toutes uniformes, et qui seront disposées de manière qu'il n'y en ait aucune en *contre-pente.* Chaque portion de canal, dressée suivant une de ces pentes, sera soumise aux diverses règles de calcul données depuis l'article 216. Et si l'on suppose le produit Q constant dans l'étendue de tout le canal, l'une quelconque de ses parties aura la quantité Q qui lui sera commune avec toutes les autres, et une valeur de la pente I qui lui sera particulière : ces valeurs étant introduites dans l'expression,

$$\frac{\omega^3}{\chi} - \frac{(a\omega + \mathrm{C}Q)\,Q}{gI},$$

il faudra y substituer pour ω et χ des nombres tels qu'elle se réduise à zéro, nombres qui changeront d'une pente à l'autre. Ainsi, ces pentes étant supposées fixées d'avance par quelque condition à laquelle on est obligé de s'assujettir, on ne peut avoir sur la longueur entière qu'elles embrassent, qu'une des deux quantités ω ou χ constantes, l'autre devant prendre les différentes valeurs nécessaires pour que l'expression ci-dessus soit toujours égale à zéro.

Il est inutile, au surplus, d'entrer dans le détail des questions relatives à chaque pente considérée isolément, et qui rentrent dans celles déjà résolues.

232. Les changemens de pente qui, dans l'hypothèse de l'article précédent, n'avaient lieu que par intervalles, étant supposés assujettis



à la loi de continuité, l'axe ou directrice du canal deviendra une courbe, et il s'agit de voir dans quels cas et comment on pourra ramener les problèmes que présente cet état de choses, à être susceptibles de solutions dont la pratique puisse tirer avantage.

La difficulté de traiter directement ces problèmes de manière à obtenir des résultats applicables, tient à des circonstances qui distinguent le mouvement de l'eau dans les canaux découverts, de celui dans les tuyaux, et qu'il est essentiel de faire remarquer.

Lorsque l'eau coule dans un tuyau de matière inflexible, droit ou courbe, dans le sens de sa longueur, de grosseur uniforme ou variable, et qu'elle y coule à plein tuyau, comme je l'ai toujours supposé, la section transversale de la masse fluide en mouvement est toujours à un point quelconque de la directrice, donnée par la forme de la paroi; et c'est ce qui rend l'analyse du mouvement de l'eau dans les tuyaux, précédemment exposée, suffisante pour les usages pratiques.

Si la paroi est cylindrique ou en général prismatique, toutes les sections transversales sont égales entre elles, et la vîtesse, qui ne peut varier qu'avec le *temps*, est, à un instant déterminé, constante dans l'étendue entière de la masse, quelle que soit la courbure de la directrice.

233. Ce dernier cas est, quant à la vîtesse et à la pression dans le sens de la directrice, absolument comparable à celui d'un système de corpuscules matériels *solides*, composé de petits prismes égaux qui se touchant base à base, sans être liés entre eux, se mouvraient dans une rainure courbe; et j'ai donné, paragraphes I, II et suivans, l'analyse complète du mouvement d'un pareil système. La parfaite assimilation des deux cas tient à ce que, dans celui-ci, la solidité des élémens de la masse rend leur forme commune indépendante des diverses pressions qu'ils éprouvent, de manière qu'ils n'ont pas besoin, pour conserver cette forme, d'être contenus dans un tuyau ou moule qui les oblige à prendre la sienne.

234. Qu'on imagine maintenant que le système dont je viens de parler, de *solide* qu'il était, devienne *fluide ;* son état devra changer aussitôt. En effet, on a vu, paragraphes IV, V, VI, que la pression dans une rainure ou canal *courbe* était nécessairement variable d'un point à l'autre, quels que fussent d'ailleurs les valeurs absolues ou les rapports des pressions extrêmes ; et cette inégalité de pressions est, en général, absolument incompatible avec l'égalité et la similitude des sections, lorsqu'il s'agit d'un fluide : c'est une conséquence immédiate des propriétés qui caractérisent la *fluidité* et qui la distinguent de l'état *solide.*

On pourrait, sans employer l'hypothèse d'un système de corpuscules qui deviennent fluides, arriver à une conclusion analogue, en supposant qu'un tuyau cylindrique, à axe courbe, dans lequel l'eau est en mouvement, devient tout-à-coup flexible, de manière que les sections transversales soient susceptibles de dilatation et de contraction, la courbe de l'axe restant la même. On pourrait encore imaginer que cette flexibilité n'a lieu que sur une partie du contour de la paroi ; ce qui donne le cas d'une masse fluide coulant sur un lit solide, et coercée, à sa surface, par la pression d'un fluide élastique, tel que l'air de l'atmosphère.

Si l'un quelconque des changemens hypothétiques dont je viens de parler, s'effectuait, il en résulterait nécessairement des augmentations et des diminutions *spontanées* de section, correspondantes aux diverses inclinaisons de la *directrice ;* et pour peu qu'on observe les exemples que nous offre la nature, on s'assurera qu'indépendamment des affluens ou des dérivations qui peuvent augmenter ou diminuer la section d'un courant d'eau, il y a une variation de cette section uniquement dépendante du changement de pente. Ce seraient là des objets de détermination à embrasser dans l'analyse, si l'on voulait considérer les choses sous le point de vue le plus général ; il faudrait trouver l'équation de la surface supérieure du fluide, et celle des intersections de cette surface avec la paroi dont la figure est censée connue.

235. Mais la pratique ne tirerait aucun parti de recherches aussi compliquées : l'hypothèse d'une pente uniforme a fourni des résultats applicables, parce qu'elle donne, dans les canaux découverts, comme dans le système solide et les tuyaux cylindriques, la vîtesse de chaque tranche, la forme et l'étendue de chaque section, constantes sur toute la longueur de la pente ; et quoiqu'on ait vu (art. 50) que cette même hypothèse, si les pressions extrêmes sont inégales, rend les pressions intermédiaires variables, on peut négliger une circonstance dont l'influence n'est pas sensible dans la presque totalité des cas de pratique qui doivent nous occuper.

Il serait donc bien avantageux de ramener à cette hypothèse les questions les plus usuelles, et elles se trouveront susceptibles d'y être ramenées lorsque la directrice d'un canal découvert sera assujettie à des conditions pareilles à celles énoncées (art. 40), qu'on peut réduire, 1.° à n'avoir nulle part de changement rapide de courbure ; 2.° à ce que la différence de niveau entre un point quelconque et le point supérieur de cette *directrice*, soit extrêmement petite par rapport à la distance de ces deux points, mesurée le long de la courbe ; 3.° à ce qu'aucune partie de cette courbe ne soit en *contre-pente*. Ajoutant à ces conditions celle d'avoir les sections transversales de la paroi très-peu variables tant en forme qu'en grandeur, de manière que ω' et ω'' étant deux de ces sections, s' l'arc de la directrice qui les sépare, et ζ' la pente totale de cet arc, $\frac{\omega''-\omega'}{\omega'}$ soit un rapport d'un ordre comparable à celui $\frac{\zeta'}{s'}$, en même temps que ω' et ω'' sont des figures semblables, ou à-peu-près semblables ; on aura le double avantage de rendre l'état des choses conforme à presque tous les cas de la nature ou de l'art, et de pouvoir lui appliquer les méthodes de calcul précédemment exposées.

En effet, supposons d'abord que la quantité Q d'eau qui passe par chaque section, est constante dans toute la longueur : si on prend deux de ces sections qui ne soient pas très-distantes entre elles, d'une

part, la partie de la courbe directrice interceptée par ces sections sera sensiblement rectiligne, et, de l'autre, la différence entre les aires de ces sections sera assez petite pour qu'on puisse regarder ces aires, et par conséquent les pressions *moyennes* tant extrêmes qu'intermédiaires, comme égales dans l'intervalle qui sépare les deux sections; la question sera ramenée à celle de l'article 231.

236. Nommant Δs la distance entre ces deux sections, mesurée sur la directrice, Δz la pente totale entre les deux extrémités de cette portion de directrice, on aura

$$\alpha U + \beta U^2 = \frac{g\omega}{\chi} \cdot \frac{\Delta z}{\Delta s};$$

ω et χ étant la section transversale et le périmètre, regardés comme constans dans l'étendue de Δs.

237. Si l'on introduit dans cette équation le produit Q, ou le volume d'eau qui passe par chaque section pendant l'unité de temps, on aura

$$\frac{g}{\chi} \cdot \frac{\Delta z}{\Delta s} \omega^3 - \alpha Q \omega - \beta Q^2 = 0.$$

238. On peut, par les raisons exposées (art. 229), substituer à χ le produit de ce périmètre par un coefficient κ; ce qui donne

$$\frac{g}{\kappa \chi} \cdot \frac{\Delta z}{\Delta s} \omega^3 - \alpha Q \omega - \beta Q^2 = 0.$$

Cette équation et la précédente fournissent les solutions des mêmes problèmes, traités depuis l'article 216 jusqu'à l'article 230, en ayant égard à ce qui est dit (art. 231).

239. Si l'on suppose Δs infiniment petit, l'équation

$$\frac{\delta z}{\delta s} = \frac{\kappa \chi (\alpha Q \omega + \beta Q^2)}{g \omega^3}$$

fait voir que lorsque la quantité Q d'eau qui passe par chaque section pendant l'unité de temps, est la même dans toute l'étendue du canal, on n'obtient une section transversale constante, tant en

forme qu'en étendue, qu'en donnant à ce canal une pente uniforme, ou à $\frac{\delta z}{\delta s}$ une valeur constante ; car si $\frac{\delta z}{\delta s}$ est un rapport variable, on ne peut pas conserver Q, ω et χ constans en même temps.

240. Celle des quantités Q, ω et χ qui, dans l'état ordinaire des choses, varie nécessairement à différens points de la longueur du canal, est le volume Q d'eau passant par chaque section pendant l'unité de temps. En effet, l'évaporation, les filtrations et les usages auxquels le canal est destiné, donnent lieu à des dépenses locales, qui, lorsqu'elles ne sont pas remplacées, occasionnent des inégalités nécessaires dans les produits par section, et, dans le cas contraire, ne se réparent jamais de manière qu'il y ait une compensation rigoureuse.

On peut, dans différentes hypothèses sur la variation de la dépense par section, chercher la courbe suivant laquelle il faudrait creuser le canal, dans le sens de sa longueur, pour avoir une section transversale constante de forme et de grandeur.

Supposons qu'on veuille remplir cette condition pour un canal qui éprouve des pertes sans réparation, la perte totale sur une longueur s, comptée depuis la prise d'eau, étant proportionnelle à cette longueur ; ce cas est celui où la perte serait due uniquement à l'évaporation et à la filtration, dans un terrain homogène.

Q' étant le volume d'eau qui passe, pendant l'unité de temps, par la section placée près de la prise d'eau, et q la diminution de cette dépense, à une distance donnée B de la prise d'eau, on a, pour le volume passant par une section quelconque, $Q' - \frac{q}{B}s$, valeur qui, substituée dans l'équation de l'article 239, donne, pour l'équation de la courbe directrice du canal,

$$z = \frac{\kappa\chi}{g\omega^3}\left[(\alpha\omega + \mathit{6}Q')Q's - (\alpha\omega + 2\mathit{6}Q')\frac{q}{2B}s^2 + \frac{\mathit{6}q^2}{3B^2}s^3\right].$$

On sait que, d'après les conditions énoncées (art. 235), la longueur s

de l'arc de la directrice peut être censée égale à la longueur de sa projection horizontale.

241. La perte de produit par section, à laquelle se rapporte l'équation de l'article précédent, est plus près des cas que la nature peut offrir, qu'une augmentation de produit qui suivrait la même loi ; cependant on peut citer, et j'ai vu des courans qui grossissaient sensiblement, et à-peu-près en raison des longueurs, par l'affluence d'une infinité de petites sources disséminées sur leur passage. On connaîtra la courbe longitudinale suivant laquelle ils devraient couler pour conserver une section constante de figure et d'étendue, en substituant, dans l'équation de l'article 239, $Q' + \frac{q}{B} s$ à la place de Q, q étant l'augmentation de dépense de la section transversale placée à une distance B de la prise d'eau, ou de la source ; ce qui donnera

$$z = \frac{\varkappa \chi}{g \omega^3} \left[(\alpha\omega + \mathfrak{C} Q') Q' s + (\alpha\omega + 2 \mathfrak{C} Q') \frac{q}{2B} s^2 + \frac{\mathfrak{C} q^2}{3 B^2} s^3 \right].$$

C'est l'équation de l'article précédent, en changeant le signe du terme qui contient s^2.

242. En général, si l'on projette un canal qui doive être grossi par des affluens, ou fournir à des dérivations, ou enfin être dans l'un et l'autre de ces deux cas, et qu'on veuille déterminer les pentes successives à lui donner, en s'assujettissant à la condition d'avoir une section transversale constante de forme et de grandeur, il faudra d'abord s'assurer des diverses quantités d'eau qui doivent passer par cette section dans les divers endroits où les pentes doivent être réglées de manière à remplir la condition prescrite, et chacune de ces pentes s'évaluera par l'équation

$$\frac{\Delta z}{\Delta s} = \frac{\varkappa \chi (\alpha Q \omega + \mathfrak{C} Q^2)}{g \omega^3},$$

dans laquelle ω et χ ont des valeurs constantes résultant de la forme et de la grandeur qu'on veut donner à la section, Q ayant

des valeurs variables et locales, dont chacune comporte une détermination particulière de la pente $\frac{\Delta z}{\Delta s}$.

243. Je n'ai introduit dans l'analyse que la variation *locale* du produit Q par section, et je n'ai pas tenu compte de la variation qui tient au *temps*, celle, par exemple, qui dépend du plus ou moins d'eau que fournissent les sources et les courans dans les diverses saisons de l'année, parce que je la regarde comme étrangère à l'objet fondamental de mes recherches; c'est aux ingénieurs à y avoir égard, dans les différens cas particuliers qui se présenteront, et en général à combiner les principes généraux que j'ai établis, avec une foule de circonstances accidentelles, sur lesquelles on ne peut donner, *à priori*, aucune règle certaine.

Je ne m'étendrai pas davantage sur les applications pratiques, et je terminerai ici mes recherches; j'en ai assez dit pour les hommes instruits livrés aux travaux hydrauliques, et ce que je pourrais ajouter ne serait d'aucun intérêt pour ceux qui envisagent cet écrit uniquement sous le point de vue de la mécanique rationnelle et de la physique.

TABLE

TABLE PREMIÈRE,

Qui donne les vîtesses moyennes correspondantes aux vîtesses à la surface, et réciproquement.

VÎTESSES à la surface.	VÎTESSES moyennes.	DIFFÉRENCES.	VÎTESSES à la surface.	VÎTESSES moyennes.	DIFFÉRENCES.
Mètres.	Mètres.		Mètres.	Mètres.	
0,00.	0,00000.		0,26.	0,20049.	
0,01.	0,00754.	754.	0,27.	0,20838.	789.
0,02.	0,01508.	754.	0,28.	0,21629.	791.
0,03.	0,02264.	756.	0,29.	0,22420.	791.
0,04.	0,03022.	758.	0,30.	0,23213.	793.
0,05.	0,03781.	759.	0,31.	0,24007.	794.
0,06.	0,04542.	761.	0,32.	0,24802.	795.
0,07.	0,05304.	762.	0,33.	0,25599.	797.
0,08.	0,06068.	764.	0,34.	0,26396.	797.
0,09.	0,06833.	765.	0,35.	0,27195.	799.
0,10.	0,07599.	766.	0,36.	0,27995.	800.
0,11.	0,08367.	768.	0,37.	0,28796.	801.
0,12.	0,09137.	770.	0,38.	0,29598.	802.
0,13.	0,09907.	770.	0,39.	0,30401.	803.
0,14.	0,10679.	772.	0,40.	0,31206.	805.
0,15.	0,11453.	774.	0,41.	0,32011.	805.
0,16.	0,12228.	775.	0,42.	0,32817.	806.
0,17.	0,13004.	776.	0,43.	0,33625.	808.
0,18.	0,13782.	778.	0,44.	0,34434.	809.
0,19.	0,14560.	778.	0,45.	0,35243.	809.
0,20.	0,15341.	781.	0,46.	0,36054.	811.
0,21.	0,16122.	781.	0,47.	0,36866.	812.
0,22.	0,16905.	783.	0,48.	0,37679.	813.
0,23.	0,17689.	784.	0,49.	0,38493.	814.
0,24.	0,18475.	786.	0,50.	0,39308.	815.
0,25.	0,19261.	786.	0,51.	0,40123.	815.
0,26.	0,20049.	788.	0,52.	0,40940.	817.

VÎTESSES à la surface.	VÎTESSES moyennes.	DIFFÉRENCES.	VÎTESSES à la surface.	VÎTESSES moyennes.	DIFFÉRENCES.
Mètres.	Mètres.		Mètres.	Mètres.	
0,52.	0,40940.	818.	0,83.	0,66721.	845.
0,53.	0,41758.	819.	0,84.	0,67566.	846.
0,54.	0,42577.	820.	0,85.	0,68412.	846.
0,55.	0,43397.	821.	0,86.	0,69258.	848.
0,56.	0,44218.	822.	0,87.	0,70106.	848.
0,57.	0,45040.	823.	0,88.	0,70954.	849.
0,58.	0,45863.	823.	0,89.	0,71803.	850.
0,59.	0,46686.	825.	0,90.	0,72653.	850.
0,60.	0,47511.	825.	0,91.	0,73503.	851.
0,61.	0,48336.	827.	0,92.	0,74354.	852.
0,62.	0,49163.	827.	0,93.	0,75206.	852.
0,63.	0,49990.	829.	0,94.	0,76058.	854.
0,64.	0,50819.	829.	0,95.	0,76912.	854.
0,65.	0,51648.	830.	0,96.	0,77766.	855.
0,66.	0,52478.	831.	0,97.	0,78621.	855.
0,67.	0,53309.	832.	0,98.	0,79476.	856.
0,68.	0,54141.	833.	0,99.	0,80332.	857.
0,69.	0,54974.	833.	1,00.	0,81189.	858.
0,70.	0,55807.	835.	1,01.	0,82047.	858.
0,71.	0,56642.	835.	1,02.	0,82905.	859.
0,72.	0,57477.	837.	1,03.	0,83764.	859.
0,73.	0,58314.	837.	1,04.	0,84623.	861.
0,74.	0,59151.	837.	1,05.	0,85484.	861.
0,75.	0,59988.	839.	1,06.	0,86345.	861.
0,76.	0,60827.	840.	1,07.	0,87206.	862.
0,77.	0,61667.	840.	1,08.	0,88068.	863.
0,78.	0,62507.	841.	1,09.	0,88931.	864.
0,79.	0,63348.	842.	1,10.	0,89795.	864.
0,80.	0,64190.	843.	1,11.	0,90659.	864.
0,81.	0,65033.	844.	1,12.	0,91523.	866.
0,82.	0,65877.	844.	1,13.	0,92389.	866.
0,83.	0,66721.		1,14.	0,93255.	

VITESSES à la surface.	VITESSES moyennes.	DIFFÉRENCES.	VITESSES à la surface.	VITESSES moyennes.	DIFFÉRENCES.
Mètres.	Mètres.		Mètres.	Mètres.	
1,14.	0,93255.	867.	1,45.	1,20391.	883.
1,15.	0,94122.	867.	1,46.	1,21274.	885.
1,16.	0,94989.	868.	1,47.	1,22159.	885.
1,17.	0,95857.	869.	1,48.	1,23044.	886.
1,18.	0,96726.	869.	1,49.	1,23930.	886.
1,19.	0,97595.	869.	1,50.	1,24816.	886.
1,20.	0,98464.	870.	1,51.	1,25702.	887.
1,21.	0,99334.	871.	1,52.	1,26589.	888.
1,22.	1,00205.	872.	1,53.	1,27477.	887.
1,23.	1,01077.	872.	1,54.	1,28364.	889.
1,24.	1,01949.	873.	1,55.	1,29253.	889.
1,25.	1,02822.	873.	1,56.	1,30142.	889.
1,26.	1,03695.	874.	1,57.	1,31031.	890.
1,27.	1,04569.	874.	1,58.	1,31921.	890.
1,28.	1,05443.	875.	1,59.	1,32811.	890.
1,29.	1,06318.	875.	1,60.	1,33701.	892.
1,30.	1,07193.	876.	1,61.	1,34593.	892.
1,31.	1,08069.	877.	1,62.	1,35485.	892.
1,32.	1,08946.	877.	1,63.	1,36377.	892.
1,33.	1,09823.	878.	1,64.	1,37269.	893.
1,34.	1,10701.	878.	1,65.	1,38162.	894.
1,35.	1,11579.	879.	1,66.	1,39056.	894.
1,36.	1,12458.	879.	1,67.	1,39950.	894.
1,37.	1,13337.	880.	1,68.	1,40844.	895.
1,38.	1,14217.	880.	1,69.	1,41739.	895.
1,39.	1,15097.	881.	1,70.	1,42634.	895.
1,40.	1,15978.	881.	1,71.	1,43529.	896.
1,41.	1,16859.	883.	1,72.	1,44425.	897.
1,42.	1,17742.	882.	1,73.	1,45322.	897.
1,43.	1,18624.	883.	1,74.	1,46219.	897.
1,44.	1,19507.	884.	1,75.	1,47116.	898.
1,45.	1,20391.		1,76.	1,48014.	

VÎTESSES à la surface.	VÎTESSES moyennes.	DIFFÉRENCES.	VÎTESSES à la surface.	VÎTESSES moyennes.	DIFFÉRENCES.
Mètres.	Mètres.		Mètres.	Mètres.	
1,76.	1,48014.	898.	2,07.	1,76038.	910.
1,77.	1,48912.	899.	2,08.	1,76948.	910.
1,78.	1,49811.	899.	2,09.	1,77858.	911.
1,79.	1,50710.	899.	2,10.	1,78769.	911.
1,80.	1,51609.	900.	2,11.	1,79680.	911.
1,81.	1,52509.	900.	2,12.	1,80591.	912.
1,82.	1,53409.	901.	2,13.	1,81503.	912.
1,83.	1,54310.	901.	2,14.	1,82415.	912.
1,84.	1,55211.	901.	2,15.	1,83327.	912.
1,85.	1,56112.	902.	2,16.	1,84239.	913.
1,86.	1,57014.	902.	2,17.	1,85152.	913.
1,87.	1,57916.	903.	2,18.	1,86065.	914.
1,88.	1,58819.	903.	2,19.	1,86979.	914.
1,89.	1,59722.	903.	2,20.	1,87893.	914.
1,90.	1,60625.	904.	2,21.	1,88807.	915.
1,91.	1,61529.	904.	2,22.	1,89722.	914.
1,92.	1,62433.	904.	2,23.	1,90636.	915.
1,93.	1,63337.	905.	2,24.	1,91551.	916.
1,94.	1,64242.	905.	2,25.	1,92467.	916.
1,95.	1,65147.	906.	2,26.	1,93383.	916.
1,96.	1,66053.	906.	2,27.	1,94299.	916.
1,97.	1,66959.	906.	2,28.	1,95215.	917.
1,98.	1,67865.	907.	2,29.	1,96132.	917.
1,99.	1,68772.	907.	2,30.	1,97049.	917.
2,00.	1,69679.	907.	2,31.	1,97966.	918.
2,01.	1,70586.	908.	2,32.	1,98884.	918.
2,02.	1,71494.	908.	2,33.	1,99802.	918.
2,03.	1,72402.	908.	2,34.	2,00720.	919.
2,04.	1,73310.	909.	2,35.	2,01639.	918.
2,05.	1,74219.	910.	2,36.	2,02557.	919.
2,06.	1,75129.	909.	2,37.	2,03476.	920.
2,07.	1,76038.		2,38.	2,04396.	

VÎTESSES		DIFFÉRENCES.	VÎTESSES		DIFFÉRENCES.
à la surface.	moyennes.		à la surface.	moyennes.	
Mètres.	Mètres.		Mètres.	Mètres.	
2,38.	2,04396.	919.	2,69.	2,33034.	928.
2,39.	2,05315.	920.	2,70.	2,33962.	928.
2,40.	2,06235.	921.	2,71.	2,34890.	928.
2,41.	2,07156.	920.	2,72.	2,35818.	929.
2,42.	2,08076.	921.	2,73.	2,36747.	929.
2,43.	2,08997.	921.	2,74.	2,37676.	929.
2,44.	2,09918.	922.	2,75.	2,38605.	930.
2,45.	2,10840.	921.	2,76.	2,39535.	929.
2,46.	2,11761.	922.	2,77.	2,40464.	930.
2,47.	2,12683.	923.	2,78.	2,41394.	930.
2,48.	2,13606.	922.	2,79.	2,42324.	931.
2,49.	2,14528.	923.	2,80.	2,43255.	930.
2,50.	2,15451.	923.	2,81.	2,44185.	931.
2,51.	2,16374.	923.	2,82.	2,45116.	931.
2,52.	2,17297.	924.	2,83.	2,46047.	932.
2,53.	2,18221.	924.	2,84.	2,46979.	931.
2,54.	2,19145.	924.	2,85.	2,47910.	932.
2,55.	2,20069.	924.	2,86.	2,48842.	932.
2,56.	2,20993.	925.	2,87.	2,49774.	932.
2,57.	2,21918.	925.	2,88.	2,50706.	933.
2,58.	2,22843.	925.	2,89.	2,51639.	932.
2,59.	2,23768.	925.	2,90.	2,52571.	933.
2,60.	2,24693.	926.	2,91.	2,53504.	933.
2,61.	2,25619.	926.	2,92.	2,54437.	933.
2,62.	2,26545.	926.	2,93.	2,55370.	934.
2,63.	2,27471.	927.	2,94.	2,56304.	934.
2,64.	2,28398.	926.	2,95.	2,57238.	934.
2,65.	2,29324.	927.	2,96.	2,58172.	934.
2,66.	2,30251.	928.	2,97.	2,59106.	934.
2,67.	2,31179.	927.	2,98.	2,60040.	935.
2,68.	2,32106.	928.	2,99.	2,60975.	935.
2,69.	2,33034.		3,00.	2,61910.	

TABLE DEUXIÈME,

Pour faciliter le calcul des formules qui donnent les rapports entre la vîtesse de l'eau dans un canal ou dans un tuyau, leurs longueurs, leurs pentes, la section du canal et son périmètre, ou le diamètre du tuyau, et les charges d'eau sur ses orifices extrêmes.

La vîtesse de l'eau dans le canal ou dans le tuyau . . . . . $= U$.
La longueur du canal ou du tuyau . . . . $= \lambda$.
La différence de niveau entre les deux points extrêmes. . $= \zeta$.
L'aire de la section transversale du canal . . . . $= \omega$.
Le périmètre de cette section . . . . $= \chi$.
Le diamètre du tuyau . . . . $= D$.
La hauteur de charge d'eau sur l'orifice supérieur . . . $= H'$.
La hauteur de charge d'eau sur l'orifice inférieur. . . . . $= H''$.

Nota. Lorsque le tuyau dégorge dans l'aire, on a $H'' = 0$.

Pour simplifier, on fera $\frac{\zeta}{\lambda} = I$; $\frac{H' + \zeta - H''}{\lambda} = J$; et $\frac{\omega}{\chi} = R$.

Formule pour les canaux.

$$0{,}0000444499\ U + 0{,}000309314\ U^2 = R I.$$

Formule pour les tuyaux.

$$0{,}0000173314\ U + 0{,}000348259\ U^2 = \tfrac{1}{4} D J.$$

VITESSES moyennes $= U$.	VALEURS correspondantes à celles de U. de RI dans les canaux.	de $\frac{1}{4} DJ$ dans les tuyaux.	VITESSES moyennes $= U$.	VALEURS correspondantes à celles de U. de RI dans les canaux.	de $\frac{1}{4} DJ$ dans les tuyaux.
0,01.	0,0000005.	0,0000002.	0,33.	0,0000484.	0,0000436.
0,02.	0,0000010.	0,0000005.	0,34.	0,0000509.	0,0000462.
0,03.	0,0000016.	0,0000008.	0,35.	0,0000534.	0,0000487.
0,04.	0,0000023.	0,0000013.	0,36.	0,0000561.	0,0000514.
0,05.	0,0000030.	0,0000017.	0,37.	0,0000588.	0,0000541.
0,06.	0,0000038.	0,0000023.	0,38.	0,0000616.	0,0000569.
0,07.	0,0000046.	0,0000029.	0,39.	0,0000644.	0,0000597.
0,08.	0,0000055.	0,0000036.	0,40.	0,0000673.	0,0000627.
0,09.	0,0000065.	0,0000044.	0,41.	0,0000702.	0,0000656.
0,10.	0,0000075.	0,0000052.	0,42.	0,0000732.	0,0000687.
0,11.	0,0000086.	0,0000061.	0,43.	0,0000763.	0,0000718.
0,12.	0,0000098.	0,0000071.	0,44.	0,0000794.	0,0000750.
0,13.	0,0000110.	0,0000081.	0,45.	0,0000826.	0,0000783.
0,14.	0,0000123.	0,0000093.	0,46.	0,0000859.	0,0000817.
0,15.	0,0000136.	0,0000104.	0,47.	0,0000892.	0,0000851.
0,16.	0,0000150.	0,0000117.	0,48.	0,0000926.	0,0000886.
0,17.	0,0000165.	0,0000130.	0,49.	0,0000960.	0,0000921.
0,18.	0,0000180.	0,0000144.	0,50.	0,0000996.	0,0000957.
0,19.	0,0000196.	0,0000159.	0,51.	0,0001031.	0,0000994.
0,20.	0,0000213.	0,0000174.	0,52.	0,0001068.	0,0001032.
0,21.	0,0000230.	0,0000190.	0,53.	0,0001104.	0,0001070.
0,22.	0,0000247.	0,0000207.	0,54.	0,0001142.	0,0001109.
0,23.	0,0000266.	0,0000224.	0,55.	0,0001180.	0,0001149.
0,24.	0,0000285.	0,0000242.	0,56.	0,0001219.	0,0001189.
0,25.	0,0000304.	0,0000261.	0,57.	0,0001258.	0,0001230.
0,26.	0,0000325.	0,0000280.	0,58.	0,0001298.	0,0001272.
0,27.	0,0000346.	0,0000301.	0,59.	0,0001339.	0,0001315.
0,28.	0,0000367.	0,0000322.	0,60.	0,0001380.	0,0001358.
0,29.	0,0000389.	0,0000343.	0,61.	0,0001422.	0,0001402.
0,30.	0,0000412.	0,0000365.	0,62.	0,0001465.	0,0001446.
0,31.	0,0000435.	0,0000388.	0,63.	0,0001508.	0,0001491.
0,32.	0,0000459.	0,0000412.	0,64.	0,0001551.	0,0001537.

VITESSES moyennes = U.	VALEURS correspondantes à celles de U. de RI dans les canaux.	de ¼ DJ dans les tuyaux.	VITESSES moyennes = U.	VALEURS correspondantes à celles de U. de RI dans les canaux.	de ¼ DJ dans les tuyaux.
0,65.	0,0001596.	0,0001584.	0,97.	0,0003342.	0,0003445.
0,66.	0,0001641.	0,0001631.	0,98.	0,0003406.	0,0003515.
0,67.	0,0001686.	0,0001679.	0,99.	0,0003472.	0,0003585.
0,68.	0,0001733.	0,0001728.	1,00.	0,0003538.	0,0003656.
0,69.	0,0001779.	0,0001778.	1,01.	0,0003604.	0,0003728.
0,70.	0,0001827.	0,0001828.	1,02.	0,0003672.	0,0003800.
0,71.	0,0001875.	0,0001879.	1,03.	0,0003739.	0,0003873.
0,72.	0,0001924.	0,0001930.	1,04.	0,0003808.	0,0003947.
0,73.	0,0001973.	0,0001982.	1,05.	0,0003877.	0,0004022.
0,74.	0,0002023.	0,0002035.	1,06.	0,0003947.	0,0004097.
0,75.	0,0002073.	0,0002089.	1,07.	0,0004017.	0,0004173.
0,76.	0,0002124.	0,0002143.	1,08.	0,0004088.	0,0004249.
0,77.	0,0002176.	0,0002198.	1,09.	0,0004159.	0,0004327.
0,78.	0,0002229.	0,0002254.	1,10.	0,0004232.	0,0004405.
0,79.	0,0002282.	0,0002310.	1,11.	0,0004304.	0,0004483.
0,80.	0,0002335.	0,0002368.	1,12.	0,0004378.	0,0004563.
0,81.	0,0002389.	0,0002425.	1,13.	0,0004452.	0,0004643.
0,82.	0,0002444.	0,0002484.	1,14.	0,0004527.	0,0004724.
0,83.	0,0002500.	0,0002543.	1,15.	0,0004602.	0,0004805.
0,84.	0,0002556.	0,0002603.	1,16.	0,0004678.	0,0004887.
0,85.	0,0002613.	0,0002663.	1,17.	0,0004754.	0,0004970.
0,86.	0,0002670.	0,0002725.	1,18.	0,0004831.	0,0005054.
0,87.	0,0002728.	0,0002787.	1,19.	0,0004909.	0,0005138.
0,88.	0,0002786.	0,0002849.	1,20.	0,0004988.	0,0005223.
0,89.	0,0002846.	0,0002913.	1,21.	0,0005067.	0,0005309.
0,90.	0,0002906.	0,0002977.	1,22.	0,0005146.	0,0005395.
0,91.	0,0002966.	0,0003042.	1,23.	0,0005226.	0,0005482.
0,92.	0,0003027.	0,0003107.	1,24.	0,0005307.	0,0005570.
0,93.	0,0003089.	0,0003173.	1,25.	0,0005389.	0,0005658.
0,94.	0,0003151.	0,0003240.	1,26.	0,0005471.	0,0005747.
0,95.	0,0003214.	0,0003308.	1,27.	0,0005553.	0,0005837.
0,96.	0,0003277.	0,0003376.	1,28.	0,0005637.	0,0005928.

VITESSES moyennes = *U.*	VALEURS correspondantes à celles de *U.* de *RI* dans les canaux.	de $\frac{1}{4}$ *DJ* dans les tuyaux.	VITESSES moyennes = *U.*	VALEURS correspondantes à celles de *U.* de *RI* dans les canaux.	de $\frac{1}{4}$ *DJ* dans les tuyaux.
1,29.	0,0005721.	0,0006019.	1,61.	0,0008733.	0,0009306.
1,30.	0,0005805.	0,0006111.	1,62.	0,0008838.	0,0009420.
1,31.	0,0005890.	0,0006204.	1,63.	0,0008943.	0,0009535.
1,32.	0,0005976.	0,0006297.	1,64.	0,0009048.	0,0009651.
1,33.	0,0006063.	0,0006391.	1,65.	0,0009155.	0,0009767.
1,34.	0,0006150.	0,0006486.	1,66.	0,0009261.	0,0009884.
1,35.	0,0006237.	0,0006581.	1,67.	0,0009369.	0,0010002.
1,36.	0,0006326.	0,0006677.	1,68.	0,0009477.	0,0010120.
1,37.	0,0006414.	0,0006774.	1,69.	0,0009586.	0,0010240.
1,38.	0,0006504.	0,0006871.	1,70.	0,0009695.	0,0010359.
1,39.	0,0006594.	0,0006970.	1,71.	0,0009805.	0,0010480.
1,40.	0,0006685.	0,0007069.	1,72.	0,0009915.	0,0010601.
1,41.	0,0006776.	0,0007168.	1,73.	0,0010026.	0,0010723.
1,42.	0,0006868.	0,0007268.	1,74.	0,0010138.	0,0010845.
1,43.	0,0006961.	0,0007369.	1,75.	0,0010251.	0,0010969.
1,44.	0,0007054.	0,0007471.	1,76.	0,0010364.	0,0011093.
1,45.	0,0007148.	0,0007573.	1,77.	0,0010477.	0,0011217.
1,46.	0,0007242.	0,0007677.	1,78.	0,0010592.	0,0011343.
1,47.	0,0007337.	0,0007780.	1,79.	0,0010706.	0,0011469.
1,48.	0,0007433.	0,0007885.	1,80.	0,0010822.	0,0011596.
1,49.	0,0007529.	0,0007990.	1,81.	0,0010938.	0,0011723.
1,50.	0,0007626.	0,0008096.	1,82.	0,0011055.	0,0011851.
1,51.	0,0007724.	0,0008202.	1,83.	0,0011172.	0,0011980.
1,52.	0,0007822.	0,0008310.	1,84.	0,0011290.	0,0012110.
1,53.	0,0007921.	0,0008418.	1,85.	0,0011409.	0,0012240.
1,54.	0,0008020.	0,0008526.	1,86.	0,0011528.	0,0012371.
1,55.	0,0008120.	0,0008636.	1,87.	0,0011648.	0,0012502.
1,56.	0,0008221.	0,0008746.	1,88.	0,0011768.	0,0012635.
1,57.	0,0008322.	0,0008856.	1,89.	0,0011889.	0,0012768.
1,58.	0,0008424.	0,0008968.	1,90.	0,0012011.	0,0012901.
1,59.	0,0008527.	0,0009080.	1,91.	0,0012133.	0,0013036.
1,60.	0,0008630.	0,0009193.	1,92.	0,0012256.	0,0013171.

VITESSES moyennes $= U$.	VALEURS correspondantes à celles de U. de RI dans les canaux.	de $\frac{1}{4} DJ$ dans les tuyaux.	VITESSES moyennes $= U$.	VALEURS correspondantes à celles de U. de RI dans les canaux.	de $\frac{1}{4} DJ$ dans les tuyaux.
1,93.	0,0012380.	0,0013307.	2,25.	0,0016659.	0,0018021.
1,94.	0,0012504.	0,0013443.	2,26.	0,0016803.	0,0018179.
1,95.	0,0012628.	0,0013581.	2,27.	0,0016948.	0,0018339.
1,96.	0,0012754.	0,0013718.	2,28.	0,0017093.	0,0018499.
1,97.	0,0012880.	0,0013857.	2,29.	0,0017239.	0,0018660.
1,98.	0,0013006.	0,0013996.	2,30.	0,0017385.	0,0018822.
1,99.	0,0013134.	0,0014136.	2,31.	0,0017532.	0,0018984.
2,00.	0,0013262.	0,0014277.	2,32.	0,0017680.	0,0019147.
2,01.	0,0013390.	0,0014418.	2,33.	0,0017828.	0,0019310.
2,02.	0,0013519.	0,0014560.	2,34.	0,0017977.	0,0019475.
2,03.	0,0013649.	0,0014703.	2,35.	0,0018126.	0,0019640.
2,04.	0,0013779.	0,0014847.	2,36.	0,0018277.	0,0019806.
2,05.	0,0013910.	0,0014991.	2,37.	0,0018427.	0,0019972.
2,06.	0,0014042.	0,0015136.	2,38.	0,0018579.	0,0020139.
2,07.	0,0014174.	0,0015281.	2,39.	0,0018731.	0,0020307.
2,08.	0,0014307.	0,0015428.	2,40.	0,0018883.	0,0020476.
2,09.	0,0014440.	0,0015575.	2,41.	0,0019037.	0,0020645.
2,10.	0,0014574.	0,0015722.	2,42.	0,0019190.	0,0020815.
2,11.	0,0014709.	0,0015871.	2,43.	0,0019345.	0,0020985.
2,12.	0,0014844.	0,0016020.	2,44.	0,0019500.	0,0021157.
2,13.	0,0014980.	0,0016169.	2,45.	0,0019656.	0,0021329.
2,14.	0,0015117.	0,0016320.	2,46.	0,0019812.	0,0021502.
2,15.	0,0015254.	0,0016471.	2,47.	0,0019969.	0,0021675.
2,16.	0,0015392.	0,0016623.	2,48.	0,0020126.	0,0021849.
2,17.	0,0015530.	0,0016775.	2,49.	0,0020285.	0,0022024.
2,18.	0,0015669.	0,0016928.	2,50.	0,0020443.	0,0022199.
2,19.	0,0015809.	0,0017082.	2,51.	0,0020603.	0,0022376.
2,20.	0,0015949.	0,0017237.	2,52.	0,0020763.	0,0022553.
2,21.	0,0016090.	0,0017392.	2,53.	0,0020924.	0,0022730.
2,22.	0,0016231.	0,0017548.	2,54.	0,0021085.	0,0022908.
2,23.	0,0016373.	0,0017705.	2,55.	0,0021247.	0,0023087.
2,24.	0,0016516.	0,0017862.	2,56.	0,0021409.	0,0023267.

VITESSES moyennes = U.	VALEURS correspondantes à celles de U. de RI dans les canaux.	de ¼ DJ dans les tuyaux.	VITESSES moyennes = U.	VALEURS correspondantes à celles de U. de RI dans les canaux.	de ¼ DJ dans les tuyaux.
2,57.	0,0021572.	0,0023448.	2,79.	0,0025318.	0,0027592.
2,58.	0,0021736.	0,0023629.	2,80.	0,0025495.	0,0027789.
2,59.	0,0021900.	0,0023810.	2,81.	0,0025673.	0,0027986.
2,60.	0,0022065.	0,0023993.	2,82.	0,0025851.	0,0028184.
2,61.	0,0022231.	0,0024176.	2,83.	0,0026031.	0,0028382.
2,62.	0,0022397.	0,0024360.	2,84.	0,0026210.	0,0028581.
2,63.	0,0022564.	0,0024545.	2,85.	0,0026391.	0,0028781.
2,64.	0,0022731.	0,0024730.	2,86.	0,0026572.	0,0028982.
2,65.	0,0022900.	0,0024916.	2,87.	0,0026754.	0,0029183.
2,66.	0,0023068.	0,0025102.	2,88.	0,0026936.	0,0029385.
2,67.	0,0023238.	0,0025290.	2,89.	0,0027119.	0,0029588.
2,68.	0,0023407.	0,0025478.	2,90.	0,0027302.	0,0029791.
2,69.	0,0023578.	0,0025667.	2,91.	0,0027487.	0,0029995.
2,70.	0,0023749.	0,0025856.	2,92.	0,0027671.	0,0030200.
2,71.	0,0023921.	0,0026046.	2,93.	0,0027857.	0,0030405.
2,72.	0,0024093.	0,0026237.	2,94.	0,0028043.	0,0030612.
2,73.	0,0024266.	0,0026429.	2,95.	0,0028229.	0,0030819.
2,74.	0,0024440.	0,0026621.	2,96.	0,0028417.	0,0031026.
2,75.	0,0024614.	0,0026814.	2,97.	0,0028605.	0,0031234.
2,76.	0,0024789.	0,0027007.	2,98.	0,0028793.	0,0031443.
2,77.	0,0024965.	0,0027202.	2,99.	0,0028982.	0,0031653.
2,78.	0,0025141.	0,0027397.	3,00.	0,0029172.	0,0031863.

TABLE TROISIÈME,

Pour faciliter et abréger les calculs des formules donnant les relations entre la longueur d'un tuyau, son diamètre, sa pente, les charges d'eau sur chacune de ses extrémités, et sa dépense.

La longueur du tuyau........................ $= \lambda$.
Son diamètre................................ $= D$.
Sa dépense par seconde...................... $= Q$.

Nota. Il s'agit ici de la seconde sexagésimale, ou de $\frac{1}{86400}$ de la durée d'un jour.

La charge d'eau sur le centre de son orifice supérieur.. $= H$.
La charge d'eau sur le centre de son orifice inférieur.. $= N'$
La différence de niveau entre ces deux centres...... $= \zeta$.

On a les équations hypothétiques,

$$Z = H + \zeta - H'; \quad j = \frac{Z}{\lambda}.$$

Nota. Lorsque l'orifice inférieur dégorgera dans l'air, on fera $H' = 0$.

La Table suivante donne les relations entre D, Q et j, déduites de l'équation

$$j\,D^5 - 0{,}000088268\,.\,Q\,D^2 - 0{,}00225830\,Q^2 = 0.$$

VALEURS de *D*.	$Q = 0,0001$.	$Q = 0,0002$.	$Q = 0,0003$.	$Q = 0,0004$.	$Q = 0,0005$.
	Valeurs de *j*.	Valeurs de *j*.	Valeurs de *j*.	Valeurs de *j*.	Valeurs de *j*.
0,01.	0,2346568.	0,9209736.	2,0589504.	3,6485872.	5,6898840.
0,02.	0,0081604.	0,0304354.	0,0668247.	0,1173284.	0,1819463.
0,03.	0,0012563.	0,0043712.	0,0093445.	0,0161763.	0,0248665.
0,04.	0,0003585.	0,0011580.	0,0023986.	0,0040803.	0,0062031.
0,05.	0,0001429.	0,0004303.	0,0008622.	0,0014387.	0,0021597.
0,06.	0,0000699.	0,0001979.	0,0003840.	0,0006281.	0,0009304.
0,07.	0,0000392.	0,0001052.	0,0001981.	0,0003179.	0,0004645.
0,08.	0,0000241.	0,0000620.	0,0001137.	0,0001792.	0,0002585.
0,09.	0,0000159.	0,0000395.	0,0000707.	0,0001097.	0,0001562.
0,10.	0,0000111.	0,0000267.	0,0000468.	0,0000714.	0,0001006.

	$Q = 0,0006$.	$Q = 0,0007$.	$Q = 0,0008$.	$Q = 0,0009$.	$Q = 0,0010$.
	Valeurs de *j*.	Valeurs de *j*.	Valeurs de *j*.	Valeurs de *j*.	Valeurs de *j*.
0,01.	8,1828408.	11,1274576.	14,5237344.	18,3716732.	22,6712700.
0,02.	0,2606785.	0,3535250.	0,4604858.	0,5815609.	0,7167502.
0,03.	0,0354151.	0,0478221.	0,0620876.	0,0782115.	0,0961938.
0,04.	0,0087669.	0,0117718.	0,0152178.	0,0191049.	0,0234331.
0,05.	0,0030252.	0,0040352.	0,0051897.	0,0064888.	0,0079324.
0,06.	0,0012908.	0,0017092.	0,0021857.	0,0027203.	0,0033131.
0,07.	0,0006380.	0,0008384.	0,0010656.	0,0013197.	0,0016006.
0,08.	0,0003515.	0,0004583.	0,0005789.	0,0007132.	0,0008614.
0,09.	0,0002103.	0,0002720.	0,0003414.	0,0004184.	0,0005030.
0,10.	0,0001343.	0,0001725.	0,0002151.	0,0002623.	0,0003141.

VALEURS de *D*.	$Q = 0,001$.	$Q = 0,002$.	$Q = 0,003$.	$Q = 0,004$.	$Q = 0,005$.
	Valeurs de *j*.	Valeurs de *j*.	Valeurs de *j*.	Valeurs de *j*.	Valeurs de *j*.
0,10.	0,00031410.	0,00107986.	0,00229728.	0,00396636.	0,00608709.
0,11.	0,00020654.	0,00069353.	0,00146096.	0,00250884.	0,00383716.
0,12.	0,00014184.	0,00046519.	0,00097005.	0,00165642.	0,00252431.
0,13.	0,00010100.	0,00032364.	0,00066793.	0,00113387.	0,00172145.
0,14.	0,00007416.	0,00023230.	0,00047441.	0,00080051.	0,00121058.
0,15.	0,00005589.	0,00017126.	0,00034611.	0,00058044.	0,00087424.
0,16.	0,00004309.	0,00012925.	0,00025848.	0,00043079.	0,00064617.
0,17.	0,00003387.	0,00009955.	0,00019705.	0,00032636.	0,00048748.
0,18.	0,00002709.	0,00007808.	0,00015297.	0,00025176.	0,00037446.
0,19.	0,00002199.	0,00006222.	0,00012069.	0,00019740.	0,00029236.
0,20.	0,00001809.	0,00005030.	0,00009662.	0,00015705.	0,00023160.
0,21.	0,00001506.	0,00004118.	0,00007836.	0,00012660.	0,00018589.
0,22.	0,00001267.	0,00003411.	0,00006431.	0,00010327.	0,00015100.
0,23.	0,00001076.	0,00002854.	0,00005334.	0,00008516.	0,00012399.
0,24.	0,00000922.	0,00002411.	0,00004468.	0,00007092.	0,00010283.
0,25.	0,00000796.	0,00002055.	0,00003776.	0,00005960.	0,00008606.
0,26.	0,00000692.	0,00001765.	0,00003217.	0,00005050.	0,00007263.
0,27.	0,00000606.	0,00001526.	0,00002762.	0,00004312.	0,00006177.
0,28.	0,00000533.	0,00001329.	0,00002387.	0,00003708.	0,00005291.
0,29.	0,00000472.	0,00001164.	0,00002077.	0,00003209.	0,00004562.
0,30.	0,00000420.	0,00001026.	0,00001817.	0,00002795.	0,00003958.
0,31.	0,00000375.	0,00000908.	0,00001599.	0,00002447.	0,00003453.
0,32.	0,00000337.	0,00000808.	0,00001414.	0,00002154.	0,00003029.
0,33.	0,00000303.	0,00000722.	0,00001256.	0,00001906.	0,00002671.
0,34.	0,00000274.	0,00000648.	0,00001121.	0,00001694.	0,00002366.

VALEURS de D.	$Q = 0{,}006$.	$Q = 0{,}007$.	$Q = 0{,}008$.	$Q = 0{,}009$.	$Q = 0{,}010$.
	Valeurs de j.	Valeurs de j.	Valeurs de j.	Valeurs de j.	Valeurs de j.
0,10.	0,00865949.	0,01168355.	0,01515927.	0,01908665.	0,02346569.
0,11.	0,00544593.	0,00733515.	0,00950481.	0,01195492.	0,01468547.
0,12.	0,00357371.	0,00480462.	0,00621704.	0,00781097.	0,00958642.
0,13.	0,00243067.	0,00326154.	0,00421406.	0,00528822.	0,00648402.
0,14.	0,00170464.	0,00228267.	0,00294468.	0,00369067.	0,00452064.
0,15.	0,00122752.	0,00164028.	0,00211252.	0,00264424.	0,00323543.
0,16.	0,00090463.	0,00120616.	0,00155076.	0,00193844.	0,00236919.
0,17.	0,00068041.	0,00090516.	0,00116172.	0,00145009.	0,00177028.
0,18.	0,00052106.	0,00069157.	0,00088597.	0,00110428.	0,00134650.
0,19.	0,00040555.	0,00053698.	0,00069666.	0,00086458.	0,00105074.
0,20.	0,00032026.	0,00042303.	0,00053992.	0,00067092.	0,00081604.
0,21.	0,00025625.	0,00033767.	0,00043014.	0,00053367.	0,00064826.
0,22.	0,00020749.	0,00027274.	0,00034676.	0,00042954.	0,00052109.
0,23.	0,00016984.	0,00022271.	0,00028259.	0,00034950.	0,00042342.
0,24.	0,00014041.	0,00018367.	0,00023259.	0,00028719.	0,00034747.
0,25.	0,00011715.	0,00015286.	0,00019319.	0,00023816.	0,00028774.
0,26.	0,00009856.	0,00012829.	0,00016182.	0,00019916.	0,00024029.
0,27.	0,00008357.	0,00010851.	0,00013660.	0,00016784.	0,00020223.
0,28.	0,00007136.	0,00009244.	0,00011615.	0,00014247.	0,00017143.
0,29.	0,00006135.	0,00007928.	0,00009942.	0,00012175.	0,00014629.
0,30.	0,00005307.	0,00006842.	0,00008563.	0,00010470.	0,00012563.
0,31.	0,00004617.	0,00005939.	0,00007419.	0,00009056.	0,00010851.
0,32.	0,00004039.	0,00005183.	0,00006462.	0,00007876.	0,00009424.
0,33.	0,00003551.	0,00004547.	0,00005658.	0,00006885.	0,00008227.
0,34.	0,00003137.	0,00004008.	0,00004978.	0,00006047.	0,00007216.

VALEURS de D.	$Q = 0{,}001$.	$Q = 0{,}002$.	$Q = 0{,}003$.	$Q = 0{,}004$.	$Q = 0{,}005$.
	Valeurs de j.	Valeurs de j.	Valeurs de j.	Valeurs de j.	Valeurs de j.
0,35.	0,00000249.	0,00000584.	0,00001005.	0,00001511.	0,00002104.
0,36.	0,00000227.	0,00000528.	0,00000904.	0,00001354.	0,00001880.
0,37.	0,00000207.	0,00000479.	0,00000816.	0,00001218.	0,00001685.
0,38.	0,00060189.	0,00000436.	0,00000739.	0,00001099.	0,00001517.
0,39.	0,00000174.	0,00000398.	0,00000672.	0,00000996.	0,00001370.
0,40.	0,00000160.	0,00000364.	0,00000612.	0,00000905.	0,00001241.
0,41.	0,00000148.	0,00000334.	0,00000560.	0,00000824.	0,00001128.
0,42.	0,00000136.	0,00000307.	0,00000513.	0,00000753.	0,00001028.
0,43.	0,00000126.	0,00000283.	0,00000471.	0,00000690.	0,00000939.
0,44.	0,00000117.	0,00000262.	0,00000434.	0,00000634.	0,00000860.
0,45.	0,00000109.	0,00000243.	0,00000401.	0,00000583.	0,00000790.
0,46.	0,00000102.	0,00000225.	0,00000371.	0,00000538.	0,00000728.
0,47.	0,00000095.	0,00000209.	0,00000344.	0,00000498.	0,00000671.
0,48.	0,00000089.	0,00000195.	0,00000319.	0,00000461.	0,00000621.
0,49.	0,00000083.	0,00000182.	0,00000297.	0,00000428.	0,00000575.
0,50.	0,00000078.	0,00000170.	0,00000277.	0,00000398.	0,00000534.

VALEURS de D.	$Q = 0{,}006$.	$Q = 0{,}007$.	$Q = 0{,}008$.	$Q = 0{,}009$.	$Q = 0{,}010$.
	Valeurs de j.	Valeurs de j.	Valeurs de j.	Valeurs de j.	Valeurs de j.
0,35.	0,00002783.	0,00003548.	0,00004399.	0,00005335.	0,00006358.
0,36.	0,00002480.	0,00003154.	0,00003904.	0,00004728.	0,00005627.
0,37.	0,00002218.	0,00002816.	0,00003478.	0,00004206.	0,00004999.
0,38.	0,00001991.	0,00002523.	0,00003111.	0,00003756.	0,00004459.
0,39.	0,00001794.	0,00002268.	0,00002792.	0,00003367.	0,00003991.
0,40.	0,00001621.	0,00002046.	0,00002515.	0,00003028.	0,00003585.
0,41.	0,00001470.	0,00001852.	0,00002272.	0,00002731.	0,00003230.
0,42.	0,00001337.	0,00001681.	0,00002059.	0,00002472.	0,00002919.
0,43.	0,00001219.	0,00001530.	0,00001871.	0,00002243.	0,00002646.
0,44.	0,00001115.	0,00001396.	0,00001705.	0,00002042.	0,00002406.
0,45.	0,00001022.	0,00001278.	0,00001558.	0,00001863.	0,00002193.
0,46.	0,00000939.	0,00001172.	0,00001427.	0,00001704.	0,00002003.
0,47.	0,00000865.	0,00001078.	0,00001310.	0,00001563.	0,00001835.
0,48.	0,00000798.	0,00000993.	0,00001206.	0,00001436.	0,00001685.
0,49.	0,00000738.	0,00000917.	0,00001112.	0,00001323.	0,00001550.
0,50.	0,00000684.	0,00000848.	0,00001027.	0,00001221.	0,00001429.

TABLE QUATRIÈME,

Pour faciliter et abréger les calculs dans lesquels on a à opérer sur des quantités relatives aux formes et aux dimensions des sections transversales des canaux, qu'on suppose être des trapèzes à bases horizontales.

L'aire de la section transversale............ $= \omega$.
Le périmètre du lit dans cette section........ $= \chi$.
La profondeur de l'eau.................. $= h$.
La largeur du canal dans le fond............ $= 1$.
Le rapport de la base du talut et sa hauteur.... $= n$.

La Table suivante donne les relations entre ω, χ, h et n, déduites des équations

$$\omega = h(1 + nh),$$
$$\chi = 1 + 2h\sqrt{[1 + n^2]}.$$

Nota. Ce sont les équations de l'article 221 en y faisant $x = 1$ mètre et $y = h$.

n.	$h = 0^m,1$.		$h = 0^m,2$.		$h = 0^m,3$.		$h = 0^m,4$.		$h = 0^m,5$.	
	ω.	$\frac{\omega}{\chi}$.	ω.	$\frac{\omega}{\chi}$.	ω.	$\frac{\omega}{\chi}$.	ω.	$\frac{\omega}{\chi}$.	ω.	$\frac{\omega}{\chi}$.
	m. q.	m.	m. q.	m.	m. q.	m.	m. q.	m.	m. q.	m.
0,0.	0,100.	0,083.	0,200.	0,143.	0,300.	0,187.	0,400.	0,222.	0,500.	0,250.
0,1.	0,101.	0,084.	0,204.	0,146.	0,309.	0,193.	0,416.	0,231.	0,525.	0,262.
0,2.	0,102.	0,085.	0,208.	0,148.	0,318.	0,197.	0,432.	0,238.	0,550.	0,272.
0,3.	0,103.	0,085.	0,212.	0,150.	0,327.	0,201.	0,448.	0,244.	0,575.	0,281.
0,4.	0,104.	0,086.	0,216.	0,151.	0,336.	0,204.	0,464.	0,249.	0,600.	0,289.
0,5.	0,105.	0,086.	0,220.	0,152.	0,345.	0,206.	0,480.	0,253.	0,625.	0,295.
0,6.	0,106.	0,086.	0,224.	0,153.	0,354.	0,208.	0,496.	0,256.	0,650.	0,300.
0,7.	0,107.	0,086.	0,228.	0,153.	0,363.	0,210.	0,512.	0,259.	0,675.	0,304.
0,8.	0,108.	0,086.	0,232.	0,153.	0,372.	0,210.	0,528.	0,261.	0,700.	0,306.
0,9.	0,109.	0,086.	0,236.	0,153.	0,381.	0,211.	0,544.	0,262.	0,725.	0,309.
1,0.	0,110.	0,086.	0,240.	0,153.	0,390.	0,211.	0,560.	0,263.	0,750.	0,311.
1,1.	0,111.	0,086.	0,244.	0,153.	0,399.	0,211.	0,576.	0,263.	0,775.	0,312.
1,2.	0,112.	0,085.	0,248.	0,153.	0,408.	0,210.	0,592.	0,263.	0,800.	0,312.
1,3.	0,113.	0,085.	0,252.	0,152.	0,417.	0,210.	0,608.	0,263.	0,825.	0,312.
1,4.	0,114.	0,085.	0,256.	0,152.	0,426.	0,210.	0,624.	0,263.	0,850.	0,312.
1,5.	0,115.	0,084.	0,260.	0,151.	0,435.	0,209.	0,640.	0,262.	0,875.	0,312.
1,6.	0,116.	0,084.	0,264.	0,150.	0,444.	0,208.	0,656.	0,261.	0,900.	0,312.
1,7.	0,117.	0,084.	0,268.	0,150.	0,453.	0,208.	0,672.	0,261.	0,925.	0,311.
1,8.	0,118.	0,084.	0,272.	0,149.	0,462.	0,207.	0,688.	0,260.	0,950.	0,310.
1,9.	0,119.	0,083.	0,276.	0,148.	0,471.	0,206.	0,704.	0,259.	0,975.	0,310.
2,0.	0,120.	0,083.	0,280.	0,148.	0,480.	0,205.	0,720.	0,258.	1,000.	0,309.
2,1.	0,121.	0,083.	0,284.	0,147.	0,489.	0,204.	0,736.	0,257.	1,025.	0,308.
2,2.	0,122.	0,082.	0,288.	0,146.	0,498.	0,203.	0,752.	0,256.	1,050.	0,307.
2,3.	0,123.	0,082.	0,292.	0,146.	0,507.	0,202.	0,768.	0,255.	1,075.	0,306.
2,4.	0,124.	0,082.	0,296.	0,145.	0,516.	0,202.	0,784.	0,255.	1,100.	0,306.
2,5.	0,125.	0,081.	0,300.	0,144.	0,525.	0,201.	0,800.	0,254.	1,125.	0,305.
2,6.	0,126.	0,081.	0,304.	0,144.	0,534.	0,200.	0,816.	0,253.	1,150.	0,304.
2,7.	0,127.	0,081.	0,308.	0,143.	0,543.	0,199.	0,832.	0,252.	1,175.	0,303.
2,8.	0,128.	0,080.	0,312.	0,142.	0,552.	0,198.	0,848.	0,251.	1,200.	0,302.
2,9.	0,129.	0,080.	0,316.	0,142.	0,561.	0,197.	0,864.	0,250.	1,225.	0,301.
3,0.	0,130.	0,080.	0,320.	0,141.	0,570.	0,197.	0,880.	0,250.	1,250.	0,300.

Q 2

n.	$h = 0^m,6$.		$h = 0^m,7$.		$h = 0^m,8$.		$h = 0^m,9$.		$h = 1^m,0$.	
	ω.	$\frac{\omega}{\chi}$.	ω.	$\frac{\omega}{\chi}$.	ω.	$\frac{\omega}{\chi}$.	ω.	$\frac{\omega}{\chi}$.	ω.	$\frac{\omega}{\chi}$.
	m. q.	m.	m. q.	m.	m. q.	m.	m. q.	m.	m. q.	m.
0,0.	0,600.	0,273.	0,700.	0,291.	0,800.	0,308.	0,900.	0,321.	1,00.	0,333.
0,1.	0,636.	0,288.	0,749.	0,311.	0,864.	0,331.	0,981.	0,349.	1,10.	0,365.
0,2.	0,672.	0,302.	0,798.	0,329.	0,928.	0,353.	1,062.	0,374.	1,20.	0,394.
0,3.	0,708.	0,314.	0,847.	0,344.	0,992.	0,371.	1,143.	0,397.	1,30.	0,421.
0,4.	0,744.	0,325.	0,896.	0,357.	1,056.	0,387.	1,224.	0,416.	1,40.	0,444.
0,5.	0,780.	0,333.	0,945.	0,368.	1,120.	0,402.	1,305.	0,433.	1,50.	0,463.
0,6.	0,816.	0,340.	0,994.	0,378.	1,184.	0,413.	1,386.	0,447.	1,60.	0,480.
0,7.	0,852.	0,346.	1,043.	0,385.	1,248.	0,423.	1,467.	0,459.	1,70.	0,494.
0,8.	0,888.	0,350.	1,092.	0,391.	1,312.	0,430.	1,548.	0,469.	1,80.	0,505.
0,9.	0,924.	0,353.	1,141.	0,396.	1,376.	0,436.	1,629.	0,476.	1,90.	0,515.
1,0.	0,960.	0,356.	1,190.	0,399.	1,440.	0,441.	1,710.	0,482.	2,00.	0,522.
1,1.	0,996.	0,358.	1,239.	0,402.	1,504.	0,445.	1,791.	0,487.	2,10.	0,528.
1,2.	1,032.	0,359.	1,288.	0,404.	1,568.	0,448.	1,872.	0,491.	2,20.	0,533.
1,3.	1,068.	0,360.	1,337.	0,406.	1,632.	0,450.	1,953.	0,494.	2,30.	0,537.
1,4.	1,104.	0,360.	1,386.	0,407.	1,696.	0,452.	2,034.	0,496.	2,40.	0,540.
1,5.	1,140.	0,360.	1,435.	0,407.	1,760.	0,453.	2,115.	0,498.	2,50.	0,543.
1,6.	1,176.	0,360.	1,484.	0,407.	1,824.	0,454.	2,196.	0,500.	2,60.	0,545.
1,7.	1,212.	0,360.	1,533.	0,407.	1,888.	0,454.	2,277.	0,500.	2,70.	0,546.
1,8.	1,248.	0,360.	1,582.	0,407.	1,952.	0,455.	2,358.	0,500.	2,80.	0,547.
1,9.	1,284.	0,360.	1,631.	0,407.	2,016.	0,455.	2,439.	0,500.	2,90.	0,548.
2,0.	1,320.	0,360.	1,680.	0,407.	2,080.	0,454.	2,520.	0,500.	3,00.	0,548.
2,1.	1,356.	0,358.	1,729.	0,406.	2,144.	0,454.	2,601.	0,500.	3,10.	0,548.
2,2.	1,392.	0,357.	1,778.	0,406.	2,208.	0,454.	2,682.	0,500.	3,20.	0,549.
2,3.	1,428.	0,356.	1,827.	0,405.	2,272.	0,453.	2,763.	0,500.	3,30.	0,549.
2,4.	1,464.	0,355.	1,876.	0,404.	2,336.	0,453.	2,844.	0,500.	3,40.	0,548.
2,5.	1,500.	0,355.	1,925.	0,404.	2,400.	0,452.	2,925.	0,500.	3,50.	0,548.
2,6.	1,536.	0,354.	1,974.	0,403.	2,464.	0,452.	3,006.	0,500.	3,60.	0,548.
2,7.	1,572.	0,353.	2,023.	0,402.	2,528.	0,451.	3,087.	0,499.	3,70.	0,547.
2,8.	1,608.	0,352.	2,072.	0,401.	2,592.	0,450.	3,168.	0,499.	3,80.	0,547.
2,9.	1,644.	0,351.	2,121.	0,401.	2,656.	0,450.	3,249.	0,498.	3,90.	0,547.
3,0.	1,680.	0,350.	2,170.	0,400.	2,720.	0,449.	3,330.	0,498.	4,00.	0,546.

TABLE DES MATIÈRES.

Table

IMPRIMÉ

Par les soins de J. J. MARCEL, Directeur général de l'Imprimerie impériale.

ERRATA.

Page 2, ligne 5, masses séparées sans aucune, *lisez* masses sans aucune.

6, 13, $AadC$, lisez $AadD$.

14, fonction connue de $s + s'$, *lisez* fonction connue de s.

16, 25, soient assujettis à la condition énoncée (art. 3), *lisez* s'il y en a, soient assujettis à certaines conditions.

24, 20, par la quantité donnée $\frac{1}{g\omega}$, tout comme $R\,o$ est le produit, par la même quantité donnée, *lisez* par la quantité donnée $g\,\omega$, la ligne $R\,o$ étant le produit par la quantité donnée $\frac{1}{g\omega}$.

26, 8, communes aux, *lisez* égales dans les.

27, 22, ne changera pas, *lisez* ne change pas.

28, 14, a $m' = s$, lisez $a\,m' = s$.

33, 25, nous introduirons dans l'analyse, *lisez* nous ferons entrer en considération.

35, 4, tous élémens, *lisez* tous les élémens.

19, et qu'alors $d\,\omega$, *lisez* et que $d\,\omega$.

37, 12, $+ S\frac{\tau''}{\omega}$, *lisez* $+ s\frac{\tau''}{\omega}$.

43, 9, (art. 243), *lisez* (art. 143).

47, 9, *la vîtesse d'un courant*, lisez *le mouvement d'un courant*.

72, 15, même paroi, *lisez* mince paroi.

76, 18, colonne 4, *lisez* colonne 5.

77, 26, colonne 4, *lisez* colonne 5.

78, 2, celles, *lisez* celle.

11, $U = 0{,}816$, *lisez* $U = 1{,}225$.

95, 2 *de la note*, $1 = 0{,}0001$, *lisez* $I = 0{,}0001$.

ts fournis par huit expérit immédiatement établies d'après ces
le fournir une première section transversale, le périmètre de
ant d'eau, en ayant égaté (voyez *le* §. *XIII des Recherches*

eau contient douze expériences; mais on en a rejeté
marquées d'une étoile.

6.	7.	8.	17.	18.	19.	20.	21.
PÉRIMÈTRE	VÎTESSES MOY						

quante-une expéeux, des formules déduites de la théorie
pour servir à lapente, son diamètre, les charges d'eau
de l'eau dans c (Recherches physico-mathém. §. XIV.)

6.	7.			15.	16.	17.
…RE D en		de…	FÉRENCES entre les vitesses d'expérience et celles calculées			
			absolues,		Proportionnelles égales aux différences absolues divisées par les vîtesses d'expérience,	
…MÈTRES.	POUCES.	P…	…ES.	NÉGATIVES.	POSITIVES.	NÉGATIVES.
…0270699.	737.	6…	…42.		0,006142.	
…135350.	84240.	7…				

ne expériences (parmi lesquelleɜu n.o 1), et de ceux déduits d'une
ıui a pour objet de déterminer la section transversale, le périmètre
ɛt égard aux forces retardatriıcherches physico-mathém. §. XVI.)

5.	6.	7.	11.	12.
EURS	VITESSES MOYENNE ES VITESSES MOYENNES OBSERVÉES ET CALCULÉES			
ONCTION $\frac{\omega \zeta}{U}$.	DONNÉES par l'expérience.	DÉDUI de l vîtesse à la VES.	PROPORTIONNELLES égales aux différences absolues divisées par les vîtesses d'expérience. POSITIVES.	NÉGATIVES.
›8623.	mètres.	mètres. 0,11634.		0,062519.
›6287.	0,124251.		0,16328.	
›8160.	0,154299.		0,065703.	
0922.		0,16082.		0,11502.
2213.		0,17283.		0,16782.
3239.		0,21253.		0,13450.
›97107.	0,242005.		0,10918.	
2481.	0,248773.	45.		0,029123.
1819.	0,262849.		0,025650.	
4567.		0,30013.		0,046921.
2779.	0,327546.		0,064379.	
0339.	0,334043.		0,18240.	
4458.		0,347	0,018066.	
3832.		0,352	0,048788.	
2641.	0,367069.		0,11249.	
4321.	0,383581.		0,062294.	
5741.	0,420938.		0,047465.	
2326.	0,494839.	01.		0,082858.
7179.	0,547896.		0,10613.	
4567.	0,549520.	37.		0,090146.
5427.	0,605555.	04.		0,06375.
5612.	0,637227.	74.		0,043743.
8149.	0,734678.	91.		0,030205.
4262.	0,744694.		0,055746.	
3961.	0,765809.		0,073983.	
8111.	0,772035.	29.		0,0063844.
1313.		0,77629.		0,064338.
7442.	0,782863.		0,013004.	
8984.	0,816430.		0,0027216.	
8662.	0,863261.		0,033828.	
8604.	0,880315.		0,043526.	
....		35.	1,2286336.	0,9373274.
....		488.	0,0682574.	0,0721021.

6275 + 3232,96 . *RI*]. { la ... s de la colonne 8 ; on pourra, dans la pratique,

calcul, pour la détermination du ... se à la surface et la vîtesse
(Recherches physico-mathématiques, S

7.	8.	9.		12.	13.
... entre les vîtesses moyennes données par l'expérience, et celles calculées par la formule de DUBUAT,			D ... moyennes données par l'expérience, et celles ... la formule de PRONY,		
...olues.	Proportionnelles égales aux différences absolues divisées par les vitesses d'expérience.			Proportionnelles égales aux différences absolues divisées par les vitesses d'expérience.	
NÉGATIVES.	POSITIVES.	NÉGATIVES.	...	POSITIVES.	NÉGATIVES.
	mètres. 0,10435.				mètres. 0,07649.
	0,09331.			mètres. 0,00372.	
	0,06128.				0,02372.
mètres. 0,01087.		mètres. 0,03319.			0,07969.
	0,15208.			0,01251.	
	0,01515.				0,00784.
0,00783.		0,01582.			0,02061.
0,00267.		0,00487.			0,00128.
	0,12992.			0,14516.	
0,07187.		0,11870.			0,09496.
0,07219.		0,11329.			0,08568.
0,01104.		0,01430.		0,01852.	
0,05982.		0,07811.			0,03891.
0,00916.		0,01061.		0,03000.	
	0,08796.			0,14101.	
0,06988.		0,06621.			0,00512.
0,01548.		0,01395.		0,04415.	
0,33081.	0,64405.	0,46905.		0,39507.	0,43430.
0,033081.	0,09201.	0,046905.	...ɔ.	0,05644.	0,04343.

...08227)² + 0,0067675. } Le mètre est l'unité lin...
...$.V.$

...a, dans la pratique, employer la seconde avec une seul... V, et la réduire à $U = 0,8.V$; ce qui ...squelles celles des cas ordinaires de pratique sont renfe...ant les $\frac{4}{5}$ des vîtesses à la surface.

ceux du calcul, pour la vérifica qui donne la vîtesse moyenne
ement, en tenant compte, conformue l'observation, des variations
lles augmentent.

	7.	8.	9.
	e les vîtesses moyennes données par l'expérience, et celles calculées par la formule de l'article 194.		
solues		Proportionnelles égales aux différences absolues divisées par les vîtesses d'expériences,	
	Négatives.	Positives.	Négatives.
..	0,001.	....	0,008.
	....	0,056.	
	....	0,029.	
..	0,011.	....	0,034.
	....	0,052.	
	....	0,028.	
	....	0,009.	
	....	0,024.	
..	0,047.	....	0,008.
..	0,045.	....	0,070.
	....	0,028.	
..	0,024.	....	0,032.
	....	0,034.	
..	0,016.	....	0,015.
	....	0,035.	
	0,144.	0,295.	0,167.
	0,024.	0,033.	0,028.

ielle on a déduit les valeurs consi-
e 5, est la suivante :

$$= \frac{V(V+2{,}37187)}{V+3{,}15312},$$

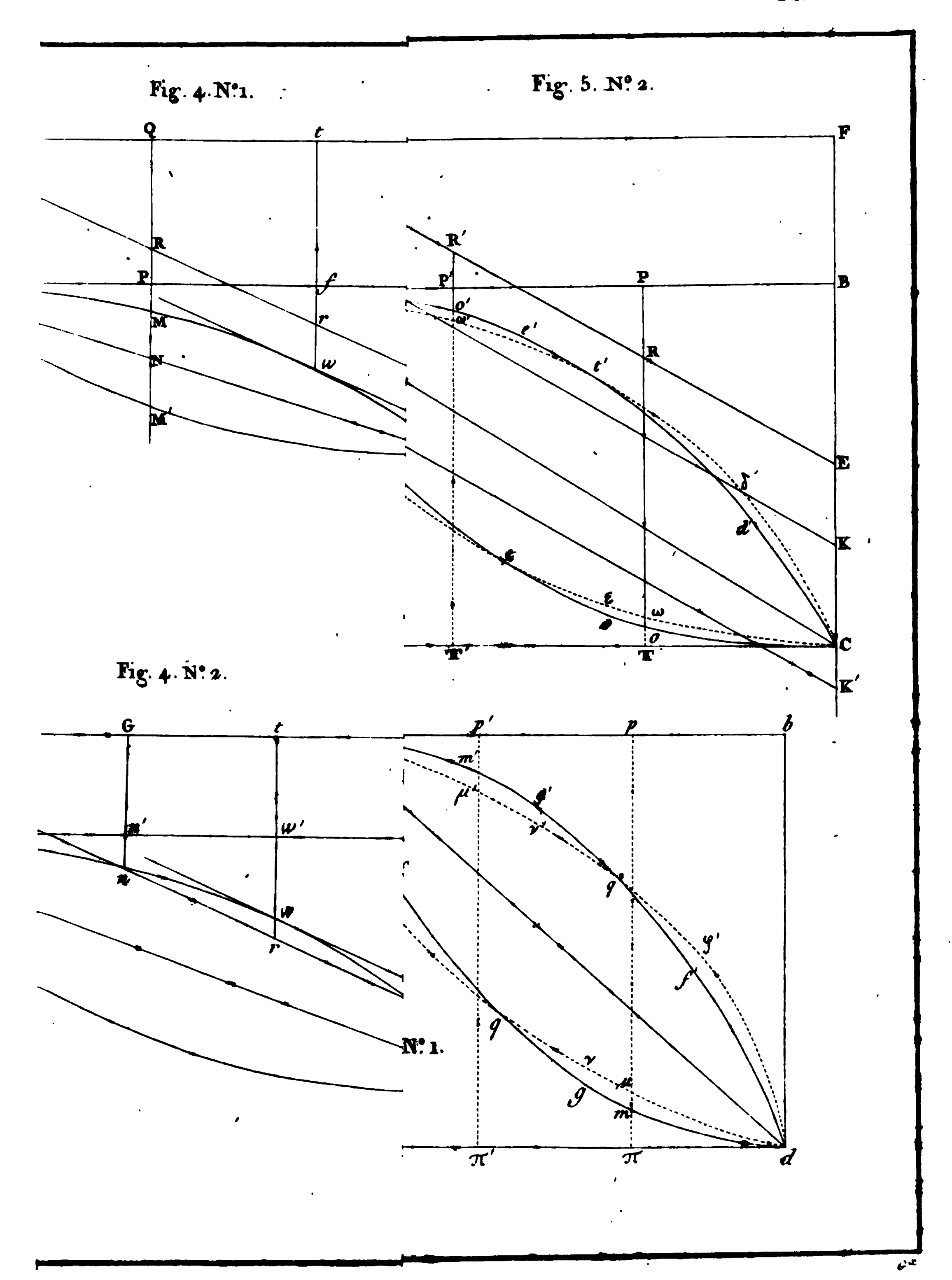
ous la forme

$$0{,}78125 + \frac{2{,}46338}{V+3{,}15312},$$

$$\text{ı} + \sqrt{[(U-a)^2 + bU]}\},$$

37, et $b = 3{,}15312$.
olonnes de différences proportion-
ce moyenne entre un résultat observé
, n'est que d'environ $\frac{1}{30}$ du premier :
e une exactitude plus que suffisante
pratiques.
),816458 V, qui donne la précision
c laquelle on a calculé la colonne 5
it être considérée comme une simpli-
nte.

r dans le calcul des différences moyennes, les
ui donnent des valeurs anomales pour le rap-


Fig. 4. N.° 1.
Fig. 5. N.° 2.
Fig. 4. N.° 2.
N.° 1.

u a nérales qui existent entre la longueur d'un tuyau, sa pente,
ités, tions analogues entre la longueur d'un canal découvert, sa
tesse.
fficien donne le mouvement de l'eau dans un tuyau de conduite et
§ 14;
$\frac{g\omega}{\lambda\chi}$ α = ab = 0,000436; 6 = gd = 0,003034. (Voyez § 16 et tableau N°. 3.)
nnes U
ités liér cette échelle par 25 millimètres, les lignes droites BD N°1 et bd N°. 2
es aua
respon r les constructions des figures de la planche
r les

ESSAI

SUR

LE MOUVEMENT DES EAUX COURANTES,

ET LA FIGURE QU'IL CONVIENT DE DONNER

AUX CANAUX QUI LES CONTIENNENT.

2

ESSAI

SUR

LE MOUVEMENT DES EAUX COURANTES,

ET LA FIGURE QU'IL CONVIENT DE DONNER

AUX CANAUX QUI LES CONTIENNENT;

Pierre Simon

PAR P. S. GIRARD,

Ingénieur en chef des ponts et chaussées, membre de l'Institut d'Égypte.

.... Quid nobis certius ipsis
Sensibus esse potest, quo vera ac falsa notemus!

TIT. LUCRET. *de Naturâ rerum*, lib. I.

A PARIS,

DE L'IMPRIMERIE DE LA RÉPUBLIQUE.

An XII = 1804 *(v. s.)*.

AVERTISSEMENT.

AVANT la découverte des lois du mouvement accéléré des graves, il était naturel de penser qu'un mobile abandonné à son propre poids devait descendre le plus promptement possible d'un point à un autre, en suivant le plus court chemin entre ces deux points, c'est-à-dire, en décrivant une ligne droite, soit que ces deux points fussent situés dans la même verticale, ou non.

L'immortel auteur de cette découverte reconnut bientôt que la ligne de la plus vîte descente d'un point à un autre n'était pas la plus courte distance que l'on pût mesurer entre eux; mais s'étant borné à comparer les temps de la chute des graves par des arcs de cercle et par les cordes de ces arcs, et ayant démontré que ce temps était moindre par un arc quelconque, que par les côtés successifs de tout polygone inscrit entre ses extrémités, il en conclut généralement que la ligne de la plus vîte descente était une portion de cercle.

Cependant, de ce qu'un corps grave parcourt une portion de cercle en moins de temps qu'il n'en emploierait à

parcourir tout polygone qui lui serait inscrit, il ne s'ensuit pas que le temps de la chute par un arc circulaire soit moindre que par l'arc de toute autre courbe tracé entre les deux mêmes extrémités. La conclusion de *Galilée* était donc évidemment hasardée, et la ligne de *la plus vîte descente* restait encore à déterminer, lorsque, soixante ans après la publication de ses dialogues, les deux frères Jean et Jacques *Bernoulli, Newton, Leibnitz* et le Mis *de l'Hôpital,* démontrèrent que cette ligne était un arc de cycloïde.

La question de la *brachystochrone,* analogue en quelque sorte à celle que nous avons essayé de résoudre, offre un exemple notable de la marche de l'esprit humain dans les mathématiques, et leur application à la physique.

Galilée reconnut le premier qu'en vertu des lois de la gravitation, il devait exister une courbe de plus vîte descente; mais l'instrument propre à la déterminer manquait à son génie : il fallut, pour y parvenir, que *Newton* et *Leibnitz* eussent inventé le calcul infinitésimal. Ainsi, dès que le mouvement fut devenu l'objet d'une science nouvelle, on s'aperçut que les progrès de cette science étaient essentiellement dépendans de ceux de l'analyse, et de la perfection de ses méthodes.

Les géomètres célèbres dont les travaux honorent notre siècle, ont, en effet, réduit à des questions de calcul toutes

les questions relatives au mouvement des corps; mais leurs découvertes sont encore trop récentes pour qu'il en ait été fait à la pratique des arts qui en sont susceptibles, autant d'applications utiles qu'on est fondé à en attendre lorsqu'elles seront plus universellement répandues.

L'art des constructions hydrauliques est celui qui réclame ces applications avec le plus d'instance, et dans lequel l'occasion de les faire se présente le plus fréquemment. L'Essai que je publie a pour objet spécial une de ces applications. J'ose espérer que le succès la justifiera dans l'exécution des canaux de dérivation, et que les ingénieurs habiles me sauront gré d'avoir entrepris d'éclairer du flambeau de la théorie une matière qui, n'ayant point fait encore l'objet de leurs recherches, paraît avoir été jusqu'à présent abandonnée aux tâtonnemens de la pratique.

ESSAI

ESSAI

SUR

LE MOUVEMENT DES EAUX COURANTES,

ET LA FIGURE QU'IL CONVIENT DE DONNER

AUX CANAUX QUI LES CONTIENNENT.

Définition du *régime permanent* du lit des fleuves. Comment il s'établit.

1. Les eaux qui coulent à la surface de la terre, exercent sur les parois de leurs lits une certaine action.

2. Par l'effet de cette action, la figure et la direction du lit des fleuves éprouvent des changemens successifs, jusqu'à ce que l'équilibre s'établisse à chaque point de leur cours entre l'action dont il s'agit, et la résistance que lui oppose en ce point la ténacité du sol dans lequel le lit est creusé.

3. Lorsque cet équilibre existe, *le régime au fleuve est permanent,* c'est-à-dire que sa pente et sa direction demeurent fixes dans cet état, comme si les parois de son lit n'étaient plus susceptibles d'être corrodées ; et alors la quantité d'eau qui s'écoule à chaque instant par une section transversale quelconque, est constante.

4. Si maintenant quelque circonstance vient troubler *ce régime permanent* ou cet état d'équilibre, soit qu'on augmente ou qu'on diminue le développement du lit du fleuve, soit qu'on le rende plus large où plus étroit, soit enfin qu'on altère sa pente naturelle par des barrages ou autres obstacles, ces modifications locales en produiront de plus ou moins sensibles dans toute l'étendue de son

cours, et le lit modifié ne parviendra à un nouvel état de permanence, qu'après avoir éprouvé de nouveaux changemens dépendans de ceux qu'on lui aura d'abord fait subir.

5. On ne s'est point occupé jusqu'à présent de rechercher la loi suivant laquelle ces changemens s'opèrent. On sait seulement que les matières provenant de la corrosion des rives du fleuve, dans quelques endroits, vont se déposer plus loin, là où le courant n'est plus animé d'une assez grande vîtesse pour les tenir suspendues; de sorte qu'en se formant de nouvelles parois de substances rapportées, ou en corrodant ses anciennes rives, le fleuve établit son nouveau lit, dont, après un certain temps, le régime devient *permanent.*

6. La plupart de nos fleuves et de nos rivières, qui n'éprouvent aujourd'hui aucun changement notable, dans les dimensions et les sinuosités de leur lit, sont arrivés à cet état de permanence ; mais ce n'est qu'après avoir sillonné en différens sens les vallées où ils coulent, comme on s'en aperçoit par les traces qu'ils ont laissées de leur passage.

La pente des courans d'eau dont le régime est permanent, n'est point uniforme.

7. En suivant le cours de ces fleuves, on remarque que leur pente n'est point uniforme, mais qu'elle diminue de plus en plus depuis leur source jusqu'à leur embouchure ; c'est-à-dire, que le fond de leur lit présente, dans sa longueur, une surface courbe concave, ayant pour plan tangent à son extrémité inférieure un plan parallèle à l'horizon.

8. Par conséquent, ne considérant ici que la pente, et faisant abstraction de toutes les circonstances qui, combinées entre elles, constituent *la permanence du régime,* on doit conclure du fait généralement reconnu qui vient d'être rapporté, que le décroissement de la pente des fleuves, suivant une certaine loi depuis leur source jusqu'à leur embouchure, est une des conditions nécessaires à la stabilité de leur lit.

9. Si, par exemple, l'on suppose un canal rectangulaire, creusé

dans un terrain homogène, sa section longitudinale, par un plan perpendiculaire à l'horizon, devra présenter une certaine courbe dont la propriété sera telle, que les eaux mises en mouvement dans ce canal, y couleront avec une vîtesse uniforme, sans dégrader ses rives ni changer la figure actuelle de son fond.

10. LA détermination rigoureuse de cette courbe conduirait donc au perfectionnement de l'architecture hydraulique, puisque l'on pourrait immédiatement donner aux canaux destinés à contenir des eaux courantes, la forme que la nature tend sans cesse à leur donner, et qui leur convient essentiellement ; on préviendrait par-là les accidens auxquels on est exposé, lorsque leur pente est distribuée au hasard : car alors les sections du courant varient plus ou moins d'un point à un autre ; d'où résulte le gonflement ou la dépression de sa surface, là où il convenait de la tenir à une hauteur déterminée.

Cas dans lesquels il importe plus ou moins de régler la pente des canaux artificiels, suivant la loi de décroissement indiquée par la nature.

11. A LA VÉRITÉ, il n'est pas toujours également important de régler les pentes des canaux artificiels avec autant de précision. Si l'on a, par exemple, un canal de desséchement à creuser dans une vallée, on peut sans inconvénient se borner à en dresser le fond de manière à procurer de l'écoulement aux eaux qu'il reçoit, et laisser ces eaux exercer librement leur action sur les parois de leur lit, jusqu'à ce que la nature l'ait elle-même réglé de la manière la plus avantageuse.

12. MAIS lorsqu'il s'agit d'amener des eaux par un canal de dérivation qu'on est forcé de soutenir sur le penchant de collines plus ou moins escarpées, il est évident que l'action continuelle de la gravité tendant à faire descendre ces eaux dans la vallée au-dessus de laquelle elles coulent, la rive qui leur sert d'appui du côté de cette vallée, sera attaquée avec d'autant plus d'énergie, et par conséquent d'autant plus exposée à des ruptures dangereuses, que la figure du canal s'éloignera davantage de celle que la nature lui aurait donnée, si elle l'avait elle-même creusé ; c'est donc alors qu'il convient d'anticiper, en quelque sorte, sur son ouvrage, en

profitant, pour arriver au même but qu'elle se propose, de toutes les lumières que l'expérience et la théorie nous fournissent.

13. CES considérations m'ont déterminé à rechercher la loi suivant laquelle il convenait de régler les pentes du canal de l'Ourcq, dont l'exécution m'est confiée.

En quoi consiste la perfection qu'on peut atteindre par la détermination de cette loi.

14. EN rendant compte de mon travail à l'Institut, je suis loin de penser qu'il existera toujours un accord rigoureux entre les résultats auxquels le raisonnement m'a conduit, et ceux que l'observation fera connaître. Le lit d'un canal creusé dans un terrain qui varie de consistance d'un endroit à un autre, ne conservera pas précisément la figure indiquée par une théorie où l'on fait abstraction de cette variabilité du sol : mais les changemens qu'il éprouvera seront les moindres possible; et, dans l'état actuel de nos connaissances, c'est en quoi consiste toute la perfection que l'on peut espérer d'atteindre.

15. AU RESTE, si la question dont il s'agit n'est susceptible que d'une solution approchée, cette difficulté lui est commune avec la plupart de celles qu'on entreprend de résoudre par l'application du calcul à la physique; et comme les derniers progrès de cette science sont dus sur-tout à cette application, les tentatives auxquelles on se livre pour soumettre à l'analyse géométrique les différens phénomènes du mouvement des corps, semblent mériter d'autant plus d'être accueillies avec indulgence, qu'elles tendent vers un but plus utile, et que la matière qui en est l'objet présente de plus grandes difficultés.

16. JE vais exposer succinctement les observations qui m'ont conduit à proposer une nouvelle théorie du mouvement des eaux courantes. J'en développerai les propositions fondamentales, et j'en comparerai les résultats à ceux des expériences qui, jusqu'à présent, ont été faites avec le plus d'exactitude sur l'écoulement des eaux dans les tuyaux de conduite.

Observations sur lesquelles la Théorie est fondée.

17. QUAND on applique une certaine force à la surface d'un fluide pesant, on remarque que cette surface se modifie et oscille pendant un certain temps, en présentant une suite d'ondulations qui se succèdent plus ou moins rapidement, et dont la limite se rapproche plus ou moins de leur origine, suivant la nature du fluide agité et la forme du vase dans lequel il est contenu.

Des ondulations qui ont lieu à la surface d'un fluide stagnant.

18. C'EST ce qui arrive, lorsqu'on laisse tomber un corps grave sur la surface de l'eau, ou qu'on dirige un courant d'air sur l'un quelconque de ses points.

19. CETTE succession d'ondulations dans une direction perpendiculaire à celle de la pesanteur, produit ordinairement sur notre vue une illusion qui la trompe, quand on ne jette sur le phénomène dont il s'agit qu'un coup-d'œil peu attentif.

20. LES ondulations qui couvrent la surface du fluide paraissent, en effet, imprimer à cette surface une certaine vîtesse horizontale, comme si la même molécule était animée d'un mouvement progressif, dans une direction perpendiculaire à celle de sa gravité ; tandis que cette molécule n'a véritablement qu'un mouvement oscillatoire, en vertu duquel elle s'élève et s'abaisse successivement comme la surface de l'eau dans des tubes recourbés; mouvement analogue à celui des pendules, et dont les circonstances dépendent de la hauteur et de l'amplitude des ondes.

21. L'IMMOBILITÉ horizontale de la surface fluide ainsi agitée, se prouve évidemment par celle des corps flottans dont elle peut être couverte. L'expérience indique en effet que ces corps n'ont aucun mouvement progressif, si le fluide qui les soutient était lui-même sans mouvement, lorsque la force extérieure qui le fait osciller, a commencé d'exercer son action.

22. C'EST ainsi que lorsqu'une chaîne flexible et pesante est suspendue par ses extrémités, et reçoit une impression verticale, il se

Analogie entre ces ondulations et celles d'un tissu flexible



retenu fixe entre ses extrémités.

manifeste sur toute sa longueur des ondulations successives qui produisent une illusion semblable à celle que nous avons indiquée, en faisant paraître cette chaîne comme animée d'un mouvement progressif, dirigé de l'une de ses extrémités à l'autre, quoique ces extrémités soient fixes.

23. L'ANALOGIE est bien plus frappante encore entre les ondulations de la surface d'un fluide et celles d'un tissu flexible, tel qu'une toile ou une étoffe quelconque. On sait, en effet, qu'en agitant verticalement ce tissu entre ses deux extrémités, les ondulations qui se manifestent par cette agitation, semblent courir dans la même direction comme les vagues de la mer.

24. SI les oscillations de la surface d'un fluide et celles d'un tissu flexible produisent le même effet sur nos sens en les abusant de la même erreur, c'est parce que le fluide et le tissu ont une propriété commune, qui, dans le mouvement particulier imprimé à l'une et à l'autre de ces substances, se manifeste à l'exclusion des autres propriétés par lesquelles ces substances sont essentiellement caractérisées.

Les fluides peuvent être considérés comme doués d'une flexibilité parfaite.

25. OR la flexibilité est évidemment cette propriété commune : elle consiste en effet en ce que les corps qui en sont doués peuvent changer de figure sous le plus léger effort, sans que leurs parties se désunissent; donc, puisque les fluides ont la faculté d'affecter ainsi toutes sortes de formes en remplissant exactement les vases qui les contiennent, il s'ensuit qu'on doit les considérer comme doués d'une flexibilité parfaite.

État de la question.

26. EN envisageant sous ce point de vue les fluides qui se meuvent dans des canaux de figure quelconque, on parviendra à déterminer les circonstances de leur mouvement, si l'on détermine les circonstances de celui d'une chaîne pesante dont les élémens sont incompressibles, et qui, éminemment flexible en tout sens, est assujettie à se mouvoir sur une surface courbe déterminée.

27. AINSI la question dont il s'agit se réduit naturellement à une question de dynamique, et peut être traitée par les principes de cette science, sans qu'on ait besoin de reçourir à ceux du parallélisme des tranches, de l'égalité de pression, ou de la conservation des forces vives, dont la plupart des géomètres ont fait usage pour résoudre les différens problèmes relatifs au mouvement des eaux.

Du Mouvement d'une Chaîne pesante sur une surface quelconque.

Expression de la force accélératrice de deux corps graves liés entre eux par un fil, et soutenus sur une surface quelconque.

28. SUPPOSONS d'abord deux corps pesans m et m' liés par un fil flexible et inextensible, soutenus sur une surface quelconque, et abandonnés à l'action de la gravité g.

Nommons x, y, z les coordonnées du premier corps,

x', y', z' les coordonnées du second rapportées à trois plans perpendiculaires entre eux.

Si l'on suppose l'axe des z parallèle à la direction de la gravité, il est évident que la force accélératrice du premier corps, s'il était libre de se mouvoir indépendamment du second, serait

$$\frac{g\,dz}{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}};$$

et que la force accélératrice du second, s'il était indépendant du premier, serait

$$\frac{g\,dz'}{\sqrt{(dx'^2+dy'^2+dz'^2)}}.$$

Nommons Φ la force accélératrice commune dont ils sont animés en vertu de leur dépendance mutuelle, on aura, suivant le principe de dynamique donné par d'Alembert,

$$m.\left(\frac{g\,dz}{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}}-\Phi\right)+m'.\left(\frac{g\,dz'}{\sqrt{(dx'^2+dy'^2+dz'^2)}}-\Phi\right)=0;$$

d'où l'on tire

$$\Phi=\frac{g}{m+m'}\left(\frac{m\,dz}{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}}+\frac{m'\,dz'}{\sqrt{(dx'^2+dy'^2+dz'^2)}}\right);$$

ou, pour plus de simplicité, en appelant s et s' les arcs des courbes à double courbure décrits par chacun des corps m et m',

$$\Phi = \frac{g}{m + m'} \left(\frac{m\,dz}{ds} + \frac{m'\,dz'}{ds'} \right).$$

Force accélératrice de trois corps liés entre eux de la même manière.

29. SUPPOSONS maintenant un troisième corps m'' attaché au second, comme celui-ci l'est au premier; nommons x'', y'', z'' ses coordonnées, et s'' l'arc de la courbe à double courbure sur laquelle il se meut; soit enfin Φ' la force accélératrice commune aux trois corps m, m', m'', nous aurons, par le même principe que nous avons déjà employé,

$$(m + m')\left[\frac{g}{m + m'}\left(\frac{m\,dz}{ds} + \frac{m'\,dz'}{ds'}\right) - \Phi'\right] + m''\left(\frac{g\,dz''}{ds''} - \Phi'\right) = 0;$$

ce qui donne

$$\Phi' = \frac{g}{m + m' + m''} \left(\frac{m\,dz}{ds} + \frac{m'\,dz'}{ds'} + \frac{m''\,dz''}{ds''} \right).$$

Ce qu'elle devient, lorsque le nombre des corps est indéfini.

30. EN GÉNÉRAL, si l'on suppose un nombre n de corps, et que l'on appelle (Φ) leur force accélératrice commune, on aura

$$(\Phi) = \frac{g}{m + m' + m'' + m''' + \ldots m_{(n-1)}} \left(\frac{m\,dz}{ds} + \frac{m'\,dz'}{ds'} + \frac{m''\,dz''}{ds''} + \frac{m'''\,dz'''}{ds'''} + \ldots \frac{m_{(n-1)}\,dz_{(n-1)}}{ds_{(n-1)}} \right).$$

Lorsqu'ils forment une chaîne de grosseur uniforme.

31. LORSQUE les fils qui retiennent entre eux les corps m, m', m'', &c. sont infiniment courts, c'est-à-dire, lorsque ces corps sont contigus, et qu'ils sont assujettis à se mouvoir sur une courbe à double courbure, tracée sur une surface quelconque, les différentielles dz, dz', dz'', &c. ds, ds', ds'', &c. appartiennent aux ordonnées verticales consécutives et aux arcs correspondans de cette courbe; de sorte que nommant M la portion de chaîne formée des élémens m, m', m'', &c. on a généralement $m = dM$, et la formule précédente se réduit à celle-ci :

$$(\Phi) = \frac{g}{\int dM + A} \left(\int \frac{dM\,dz}{ds} + B \right).$$

32. FAISONS dM proportionnel à ds, ou la chaîne d'une grosseur uniforme, nous aurons

$$\Phi = g\left(\frac{z + B}{s + A}\right);$$

expression

expression de la force accélératrice qui anime une portion de chaîne pesante mise en mouvement sur une courbe quelconque.

33. On voit que cette expression de la force accélératrice convient également, soit que le mouvement ait lieu sur une courbe à double courbure, ou sur une courbe plane : mais dans le premier cas,

$$s = \int \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)};$$

et dans le second,

$$s = \int \sqrt{(dx^2 + dz^2)}.$$

Ainsi nous nous bornerons à examiner celui-ci ; et les résultats auxquels nous parviendrons, s'appliqueront immédiatement à celui-là.

34. Il s'agit d'abord de déterminer les constantes A et B d'après les conditions de la question.

Qu'on se propose par exemple de trouver la valeur de (Φ) pour une portion de chaîne supposée en $M\ N$ sur la courbe matérielle donnée $AMNC$ (*fig. 1.re*).

Faisons l'ordonnée $P{\cdot}N$ correspondante au chaînon inférieur $= z'$, l'arc $C\ N$ de la courbe auquel cette abscisse est appliquée $= s'$; il est clair que les constantes A et B seront telles, que l'on aura

$$z' + B = 0$$
$$s' + A = 0,$$

et par conséquent

$$(\Phi) = g\left(\frac{z - z'}{s - s'}\right).$$

35. Expression complète lorsque z et s représentent l'ordonnée et l'arc de la courbe correspondans au chaînon supérieur. Mais Δ étant la notation des différences finies, on a $z - z' = \Delta z$, $s - s' = \Delta s$. On peut donc mettre l'équation précédente sous cette forme,

$$(\Phi) = g\,\frac{\Delta z}{\Delta s};$$

laquelle, en supposant la chaîne infiniment courte, devient

$$(\Phi) = g\,\frac{dz}{ds},$$

comme on le trouve pour la force accélératrice d'un corps solide dont la masse est réunie toute entière à son centre de gravité et qui se meut sur une courbe quelconque.

36. Si dans l'équation $(\Phi)=g\,\frac{z-z'}{s-s'}$

on suppose que les quantités z et z', s et s' soient les abscisses et les arcs correspondans aux extrémités A et C de la courbe, on aura évidemment z' et s' égaux à zéro ; ce qui donne

$$(\Phi)=g\,\frac{z}{s}$$

pour la force accélératrice d'une chaîne pesante étendue sur toute la longueur d'une courbe matérielle donnée.

37. Si l'on conçoit que cette chaîne prolongée au-delà du sommet A soit soutenue sur toute la longueur d'une courbe AC' ayant son extrémité inférieure C' sur la même horizontale que l'extrémité C de la première, il est évident qu'en nommant (Φ') la force accélératrice dont la portion AC' de la chaîne est animée, et s' la longueur de la courbe sur laquelle elle s'appuie, on aura

$$(\Phi')=g\,\frac{z}{s'}.$$

Loi de l'équilibre d'une chaîne pesante soutenue sur une surface courbe entre deux plans horizontaux.

38. Les momens des deux portions de la chaîne que nous supposons descendre de part et d'autre du point A sur les courbes AC et AC' sont, comme on sait, égaux aux produits de leurs forces accélératrices par leurs masses respectives, lesquelles, à cause de la grosseur uniforme de la chaîne, sont ici proportionnelles aux longueurs s et s'.

Le moment de la portion AC est donc

$$(\Phi)\,s=gz\,;$$

et celui de la portion AC'

$$(\Phi')\,s'=gz$$

Donc, à cause de l'égalité de ces momens, il y a équilibre entre les deux portions de la chaîne AC et AC' ; et cet équilibre existe,

soit que les deux courbes enveloppées par la chaîne aient tous leurs points dans un même plan, ou qu'elles soient à double courbure, soit qu'on les suppose ou non assujetties à la loi de continuité.

39. DONC, si l'on conçoit une surface courbe quelconque soutenue sur un plan horizontal, et que par le sommet de cette surface on applique sur elle une chaîne pesante d'une grosseur uniforme, les deux portions de cette chaîne qui descendront de part et d'autre du sommet de la surface courbe jusqu'au plan horizontal qui lui sert de base, se feront mutuellement équilibre, de quelque manière qu'on les suppose d'ailleurs se développer sur la surface dont il s'agit; proposition tout-à-fait générale, et dont le théorème de *Stevin* n'est qu'un cas très-particulier.

40. JE reprends maintenant la formule

Ce que devient la force accélératrice de la chaîne, lorsque $z = s$, et $z = 0$.

$$(\Phi) = g\frac{z}{s},$$

et j'observe, 1.° que les deux suppositions de $z = s$, et de $z = 0$, dont la première exprime le cas où la chaîne glisse le long d'une droite verticale, et dont la seconde convient à celui où elle est soutenue sur une droite horizontale, donnent l'une $(\Phi) = g$, et l'autre $(\Phi) = 0$; ce qui est d'ailleurs évident.

41. J'OBSERVE en second lieu que cette force accélératrice $(\Phi) = g\frac{z}{s}$ sera constante tant que les quantités z et s resteront les mêmes. Si donc on conçoit que le chaînon antérieur au moment même qu'il dépasse l'extrémité inférieure C de la courbe matérielle sur laquelle le mouvement a lieu, s'anéantisse tout-à-coup, et soit remplacé au même instant par un chaînon égal, qui, animé précisément de la même vîtesse que le chaînon anéanti, entre sur cette courbe par son extrémité supérieure A, les circonstances du mouvement de la chaîne, ainsi formée d'élémens successifs, seront précisément les mêmes que celles du mouvement uniformément

Cette force est constante, lorsque la chaîne mobile est composée de chaînons successifs.

varié ; ce qui nous dispense de nous occuper d'une recherche dont les résultats n'offriraient aucune particularité nouvelle.

Analogie entre cette chaîne et un fluide en mouvement dans un canal ou tuyau de conduite.

42. MAIS, si l'on considère la courbe *AC* comme un canal ou tuyau de conduite au moyen duquel un fluide incompressible et pesant s'écoule d'un réservoir supérieur entretenu constamment plein, dans un réservoir inférieur dont l'état est aussi permanent, il est évident d'abord que la vîtesse du fluide sera constante en un instant quelconque dans toute la longueur du canal ou tuyau de conduite supposé prismatique ou cylindrique, puisque le fluide dont il est plein est incompressible : il est évident ensuite qu'en vertu de la liaison réciproque des molécules élémentaires de ce fluide, liaison qui constitue son extrême flexibilité, il se mouvra dans le canal ou tuyau de conduite, précisément comme la chaîne pesante à chaînons successifs, se meut sur la courbe *AC*; et cette identité sert de base à la théorie des eaux courantes, que nous nous proposons de développer.

Recherche de la force accélératrice d'une chaîne à chaînons successifs, en ayant égard au frottement.

43. NOUS avons vu que, si une chaîne parfaitement flexible, et dont tous les chaînons se renouvellent successivement, n'éprouvait aucun obstacle à se mouvoir sur la courbe qui la soutient, sa vîtesse s'accélérerait uniformément, comme celle des corps graves dans leur chute : mais, puisqu'il n'existe aucune surface parfaitement polie, la pression normale que chacun des chaînons exerce sur l'élément correspondant de la courbe matérielle, occasionne un frottement qui modifie la force accélératrice de la chaîne.

Pour déterminer généralement la loi suivant laquelle cette modification s'opère, je reprends l'hypothèse faite art. 28, et je considère deux corps m et m' liés entre eux par un fil flexible et inextensible, abandonnés à l'action de leur gravité, sur une surface courbe quelconque.

Les coordonnées rectangles de ces corps sont $x, y, z; x', y', z';$

Le rapport du frottement à la pression $=f$.

Cela posé, si par le lieu du premier corps m sur cette surface,

et par le lieu infiniment voisin qu'il occupe dans l'instant suivant, on fait passer un plan vertical, ce plan coupera la surface donnée suivant un des élémens de la courbe à double courbure décrite par le corps m; et l'on trouve aisément que l'action de la gravité décomposée perpendiculairement à cet élément, a pour expression

$$g\,\frac{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}}.$$

De plus, si l'on nomme u la vitesse actuelle du mobile le long de la courbe qu'il décrit, r le rayon de courbure correspondant au point qu'il occupe, la force centrifuge dont il sera animé en ce point sera $\pm\frac{u^2}{r}$, selon que le mouvement a lieu sur la concavité ou la convexité de la courbe.

On aura donc pour la pression normale entière,

$$g\,\frac{\sqrt{(dx^2+dy)}}{\sqrt{(dx^2+dy+dz^2)}}\pm\frac{u^2}{r};$$

et par conséquent, pour le frottement qui en résulte,

$$f.\left(g\,\frac{\sqrt{(dx^2+dy)}}{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}}\pm\frac{u^2}{r}\right)=f.\left(g\frac{d\sigma}{ds}\pm\frac{u^2}{r}\right),$$

en faisant $\sqrt{(dx^2+dy^2)}=d\sigma$, $\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}=ds$.

Le frottement qu'éprouve le second corps m' sera de même

$$f\left(g\frac{d\sigma'}{ds'}\pm\frac{u'^2}{r'}\right);$$

expression qui doit toujours être affectée du signe négatif, puisque le frottement est, de sa nature, une force essentiellement retardatrice.

Si les corps m et m' pouvaient se mouvoir indépendamment l'un de l'autre, leurs forces respectives, en ayant égard au frottement, seraient donc,

Pour le premier, $g\frac{dz}{ds}-f\left(g\frac{d\sigma}{ds}\pm\frac{u^2}{r}\right)$;

Et pour le second, $g\frac{dz'}{ds'}-f\left(g\frac{d\sigma'}{ds'}\pm\frac{u'^2}{r'}\right)$.

Mais, à cause de leur dépendance mutuelle, on a $u=u'$; et par

conséquent, pour déterminer leur force accélératrice commune Φ,

$$m\left[g\frac{dz}{ds}-f.\left(g\frac{d\sigma}{ds}\pm\frac{u^2}{r}\right)-\Phi\right]+m'\left[g\frac{dz'}{ds'}-f.\left(g\frac{d\sigma'}{ds'}\pm\frac{u^2}{r'}\right)-\Phi\right]=0;$$

d'où l'on tire

$$\Phi=\frac{1}{m+m'}\left[g\left(\frac{mdz}{ds}+\frac{m'dz'}{ds'}\right)-fg\left(\frac{md\sigma}{ds}+\frac{m'd\sigma'}{ds'}\right)\mp f\left(\frac{mu^2}{r}+\frac{m'u^2}{r'}\right)\right].$$

44. En général, les corps m, m', m'', &c. étant supposés égaux à dM, et proportionnels aux élémens des courbes à double courbure qu'ils décrivent, on aura

$$\Phi=\frac{1}{\int dM+A}\left[g(\int dz+B)-gf(\int d\sigma+C)\mp f\left(\int\frac{u^2ds}{r}+D\right)\right].$$

Or il est évident que l'intégrale $\int d\sigma=\int\sqrt{(dx^2+dy^2)}=\sigma$, n'est autre chose que la projection horizontale d'un arc fini de la courbe à double courbure que décrit la chaîne sur la surface donnée. On voit d'ailleurs que $\int\frac{ds}{r}$ est une intégrale connue par l'équation de cette courbe. Faisant donc généralement $\int\frac{ds}{r}=\theta$, l'expression de la force accélératrice précédente, étant rendue complète, deviendra,

$$\Phi=\frac{g(z-z')-fg.(\sigma-\sigma')\mp fu^2(\theta-\theta')}{s-s'},$$

dans laquelle les quantités z, σ, θ, et s; z', σ', θ' et s' correspondent aux chaînons extrêmes de la chaîne en mouvement.

45. Elle peut encore se mettre sous cette forme plus simple:

$$\Phi=\frac{g\Delta z-fg\Delta\sigma\mp fu^2\Delta\theta}{\Delta s}.$$

Lorsque la chaîne mobile enveloppe la courbe entière, et qu'elle se renouvelle successivement, on a z', σ', θ', et s', égaux à zéro, ce qui donne

$$(\Phi)=\frac{gz-fg\sigma\mp fu^2\theta}{s};$$

équation qui a lieu également soit que la courbe décrite ait une

double courbure, ou qu'elle soit toute entière dans un plan vertical, supposition pour laquelle $\sigma = x$, et $s = \int \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$.

46. On a eu égard, dans cette expression de la force accélératrice, au frottement résultant de la pression normale sur la courbe matérielle qui soutient la chaîne en mouvement. Mais l'expérience a fait connaître que les mobiles éprouvent encore une autre résistance proportionnelle à une certaine fonction de la vîtesse.

En ayant égard à la résistance proportionnelle au carré de la vîtesse.

47. Si l'on conçoit en effet les aspérités dont les surfaces sont couvertes, comme de petites pointes dures ou élastiques infiniment près les unes des autres, il est clair qu'elles opposeront d'autant plus de résistance au mouvement du corps qui, en les choquant, tend à les plier ou à les rompre, qu'elles seront frappées avec plus de force; c'est-à-dire, que ce corps sera mu avec plus de vîtesse. Il n'est pas moins évident que ce corps éprouvera d'autant plus de résistance dans un instant quelconque, qu'il choquera un plus grand nombre d'aspérités; c'est-à-dire, qu'il parcourra un plus grand espace, ou, ce qui est la même chose, qu'il sera animé d'une vîtesse plus grande.

48. Donc, si l'on appelle q la résistance qu'oppose chacune des aspérités de la surface qui soutient le mobile, au choc de ce mobile, lorsqu'il est animé d'une vîtesse connue V, cette résistance, lorsque la vîtesse $= u$, sera $q\frac{u}{V}$; et par conséquent l'on aura pour la résistance qu'opposent successivement toutes les aspérités choquées dans un instant infiniment petit, pendant lequel la vîtesse reste constante, $q\frac{u^2}{V}$; d'où l'on voit que les corps en mouvement sur une surface matérielle quelconque éprouvent une résistance égale au carré de leur vîtesse, multiplié par un certain coëfficient dépendant de la nature de cette surface et de son degré de poli.

Cela posé, nommant R ce coëfficient, nous aurons pour les

forces dont seraient animés deux corps m et m' sur une surface quelconque, s'ils étaient indépendans l'un de l'autre,

$$g\frac{dz}{ds}-f\left(g\frac{d\sigma}{ds}\pm\frac{u^2}{r}\right)-Ru^2$$

$$\text{et } g\frac{dz'}{ds'}-f\left(g\frac{d\sigma'}{ds'}\pm\frac{u'^2}{r'}\right)-Ru'^2\,;$$

donc, à cause de leur dépendance mutuelle, leur force accélératrice commune étant ϕ, on aura l'équation

$$\phi=\frac{1}{m+m'}\left[g\left(\frac{mdz}{ds}+\frac{m'dz'}{ds'}\right)-fg\left(\frac{md\sigma}{ds}+\frac{m'd\sigma'}{ds'}\right)\pm f\left(\frac{mu^2}{r}+\frac{m'u'^2}{r'}\right)\right]-Ru^2.$$

Si l'on suppose une suite de chaînons contigus m, m', m'', m''', &c. égaux chacun à dM et proportionnels aux élémens ds, ds', ds'', ds''', &c. de la courbe sur laquelle ils sont appuyés; si l'on observe de plus que les vîtesses u, u', u'', u''', &c. de chacun de ces chaînons sont toutes égales entre elles, on aura généralement pour la force accélératrice

$$\phi=\frac{1}{\int dM+A}\left[g(\int dz+B)-fg(\int d\sigma+C)\mp f\left(\int\frac{ds}{r}u^2+D\right)\right]-Ru^2;$$

équation qui devient, après avoir effectué et complété convenablement les intégrales indiquées pour la chaîne, composée d'élémens successifs,

$$\phi=\frac{gz-fg\sigma\mp fu^2\theta}{s}-Ru^2\,;$$

ou, en supposant la courbe décrite dans un plan vertical,

$$\phi=\frac{gz-fgx\pm fu^2\theta}{s}-Ru^2.$$

49. On voit que les quantités z, x, s et θ étant constantes pour une courbe déterminée, la force accélératrice ϕ sera variable, puisqu'elle est une fonction de la vîtesse u, qui s'accélère de plus en plus, jusqu'à ce qu'elle devienne uniforme.

Pour trouver les circonstances du mouvement dans cette hypothèse, je fais

$$\frac{gz-gfx}{s}=K,$$

$$\mp\frac{f\theta-Rs}{s}=N,$$

et

et j'appelle S la longueur de la chaîne qui s'est écoulée sur la courbe pendant le temps t.

Ainsi l'on a les deux formules

$$(K - Nu^2)\,dt = du$$
$$u\,dt = dS.$$

La première donne immédiatement par son intégration,

$$t = \frac{1}{2\sqrt{(KN)}}\,Log.\left(\frac{\sqrt{(K)} + u\sqrt{(N)}}{\sqrt{(K)} - u\sqrt{(N)}}\right);$$

et la seconde après l'élimination de dt,

$$S = A - \frac{1}{2N}\,Log.(K - Nu^2).$$

La constante A se détermine par la condition que S et u soient nuls en même temps; donc $A = \frac{1}{2N}\,Log.\,K$; donc enfin

$$S = \frac{1}{2N}\,Log.\left(\frac{K}{K - Nu^2}\right);$$

équations au moyen desquelles il est aisé d'assigner les circonstances du mouvement de la chaîne à *chaînons successifs* ou de l'écoulement du fluide.

Reprenons la formule générale

$$(\Phi) = \frac{gz - gfx \mp fu^2\theta}{s} - Ru^2,$$

et observons que la vîtesse étant uniforme, et parvenue à son *maximum* lorsque la force accélératrice est nulle, on a, pour déterminer cette vîtesse,

$$\frac{gz - gfx \mp fu^2\theta}{s} - Ru^2 = 0;$$

équation dans laquelle il faut substituer pour f et R leurs valeurs données par l'expérience.

Expression de la vîtesse lorsque la force accélératrice est nulle.

50. S'il s'agit d'appliquer cette équation au mouvement uniforme d'un fluide dans un canal ou tuyau de conduite, on voit que z représente sa pente entre ses deux extrémités, x ou σ sa projection horizontale, s son développement, enfin θ une certaine fonction des coordonnées de la courbe qu'il affecte. Or toutes

ces quantités sont connues par l'observation : ainsi l'on peut déduire immédiatement de la théorie qui vient d'être exposée, la vîtesse des eaux courantes dans un tuyau de figure déterminée.

51. NOUS venons de voir que la force accélératrice d'une chaîne pesante en mouvement sur une courbe, était

$$\Phi = \frac{gz - fg\sigma \mp fu^2 \theta}{s} - Ru^2.$$

La force accélératrice d'une chaîne semblable sur une autre courbe, sera

$$\Phi' = \frac{gz' - fg\sigma' \mp fu'^2 \theta'}{s'} - Ru'^2.$$

Expression de cette force, lorsque la chaîne se meut sur deux courbes consécutives.

52. CONSIDÉRONS maintenant ces deux courbes comme placées à la suite l'une de l'autre, de façon que l'extrémité supérieure de la seconde s'applique sur l'extrémité inférieure de la première. Supposons, en outre, que leurs ordonnées z et z' restant toujours verticales, les deux chaînes qu'elles soutiennent soient attachées l'une à l'autre, pour n'en former qu'une seule : il est évident qu'en vertu de leur dépendance mutuelle, leur force accélératrice commune (Φ) sera donnée par l'équation

$$(\Phi) = \frac{\varphi s + \varphi' s'}{s + s'},$$

ou, en substituant pour Φ et Φ', leurs valeurs,

$$(\Phi) = \frac{g(z + z') - gf(\sigma + \sigma') \mp fu^2 (\theta + \theta')}{s + s'} - Ru^2.$$

De même si l'on a une troisième courbe contiguë à la seconde,

$$(\Phi) = \frac{g(z + z' + z'') - gf(\sigma + \sigma' + \sigma'') \mp fu^2 (\theta + \theta' + \theta'')}{s + s' + s''} - Ru^2.$$

Et, en général, sur un nombre indéterminé de courbes à la suite les unes des autres.

53. ET, en général, comme toutes ces courbes sont indépendantes les unes des autres, on peut supposer

$$z + z' + z'' + \&c. = Z,$$
$$\sigma + \sigma' + \sigma'' + \&c. = \Sigma,$$
$$\theta + \theta' + \theta'' + \&c. = \tau,$$
$$s + s' + s'' + \&c. = S.$$

Ainsi l'on aura généralement

$$(\Phi) = \frac{gZ - gf\Sigma \mp fu\Upsilon}{S} - Ru^2;$$

équation qui exprime la force accélératrice d'une chaîne mobile sur une courbe matérielle composée de courbes consécutives différentes.

54. On pourra donc, en faisant $(\Phi) = 0$, déterminer, au moyen de cette équation, la vîtesse uniforme de l'eau dans un tuyau de conduite quelconque, dont on connaîtra la pente, les sinuosités horizontales, et le développement.

Comment on détermine les coëfficiens R et f.

Quant aux quantités R et f, si, par une suite d'observations, on a

$$\frac{gZ - gf\Sigma \mp fu^2 \Upsilon}{S} - Ru^2 = 0,$$

$$\frac{gZ' - gf\Sigma' \mp fu'^2 \Upsilon'}{S'} - Ru'^2 = 0,$$

$$\frac{gZ'' - gf\Sigma'' \mp fu''^2 \Upsilon''}{S''} - Ru''^2 = 0,$$

&c.

équations où le même nombre d'accens affecte les quantités variables dans chaque observation, et qui donneront autant de valeurs de R et de f que l'on pourra en former de combinaisons deux à deux, il est évident que la matière des tuyaux de conduite, et la pesanteur spécifique du fluide qui y est en mouvement, restant les mêmes, la théorie d'où ces formules ont été déduites, approchera d'autant plus de la vérité, que les valeurs trouvées pour f et pour R, au moyen de ces combinaisons, approcheront plus d'être constantes.

Recherche des Courbes sur lesquelles les Chaînes à chaînons successifs peuvent être mises en mouvement, en ayant égard à la ténacité spécifique de ces chaînes.

55. Nous avons supposé jusqu'ici que la chaîne mise en mouvement sur une courbe quelconque, était composée d'une matière

La chaîne mobile a été supposée jusqu'ici éminemment tenace.

éminemment tenace, telle que la tension qu'elle éprouve en l'un quelconque de ses points, ne pouvait opérer sa rupture.

Le fluide en mouvement a été supposé contenu dans un tuyau de conduite.

56. ET lorsque nous avons comparé le mouvement de cette chaîne à celui d'un fluide dans un tuyau de conduite, nous avons supposé que ce fluide remplissait exactement le tuyau, de telle sorte que l'espèce de chaîne qu'il présente reste nécessairement de forme invariable, pendant la durée de son mouvement.

Condition qui doit avoir lieu pour la permanence de la chaîne dans son état primitif, lorsqu'elle est compressible et extensible.

57. MAIS, si la chaîne à chaînons successifs n'a qu'une ténacité finie, il n'y a aussi que certaines courbes sur lesquelles elle peut se mouvoir sans s'alonger ou se contracter en quelque point, puisque cet alongement ou cette contraction est l'effet de la tension ou de la compression dépendante de la courbure de la surface matérielle qui la soutient; d'où il suit que la permanence de la chaîne dans sa forme primitive ne peut exister à moins que le *maximum* de tension ou de compression qu'elle éprouve, ne soit moindre que sa ténacité spécifique.

Comment le cours d'un fluide peut être rendu permanent dans un canal ouvert.

58. DE MÊME, si l'on suppose un fluide en mouvement dans un canal ouvert, il se gonflera ou s'affaissera transversalement en quelque point de son cours, à moins que la surface sur laquelle il s'écoule, n'ait, par la disposition de ses élémens, la propriété de produire et de conserver la permanence de ses sections à une hauteur constante. C'est de la détermination de cette surface que nous allons nous occuper.

Recherche de la pression ou de la tension qu'éprouve chacun des chaînons d'une chaîne en mouvement sur une courbe.

59. AFIN de ramener cette question à toute la simplicité dont elle est susceptible, je supposerai d'abord qu'une chaîne à chaînons successifs se meuve sur une courbe plane déterminée.

Cela posé, concevons sur cette courbe (*fig. 2*), trois élémens consécutifs, MM', $M'M''$, $M''M'''$; et sur l'extrémité de l'élément intermédiaire $M'M''$, deux chaînons pesans m', m'', retenus entre eux par une verge parallèle à cet élément. La question consiste à rechercher la force avec laquelle ces deux chaînons

tendent à comprimer ou à étendre cette verge parallèlement à sa longueur.

J'observe d'abord que, s'il y avait un point d'appui en M'' qui soutînt le poids du chaînon supérieur, de manière à ce qu'il n'agît plus sur la verge $M' M''$, cette verge serait seulement tirée par le chaînon inférieur m', qui, par l'action de sa gravité, tendrait à l'alonger.

Si, au contraire, le chaînon inférieur m' était retenu en M', le chaînon m'' agirait seul sur la verge, et tendrait à la comprimer.

Mais, parce que ni l'un ni l'autre des chaînons m' et m'' ne sont fixes aux points sur lesquels ils s'appuient actuellement, il est clair que la verge qui les unit se soustrait en partie à la force avec laquelle le chaînon inférieur tend à l'alonger, en cédant à celle avec laquelle le chaînon supérieur tend à la comprimer, et réciproquement. La valeur de son extension ou de sa compression *effective* n'est donc que la différence entre l'extension et la compression *virtuelles* que tendent à produire les chaînons m' et m'' par l'action de leur poids décomposé, suivant la direction de l'élément $M' M''$.

Il ne s'agit donc que de déterminer cette extension et cette compression *virtuelles.* Faisons

L'abscisse $A P' = x$;
L'ordonnée verticale $P' M' = z$;
L'arc $C M' = s$;
Le rayon de courbure au point $M' = r$;

Nous aurons

$P' P'' = Q' M'' = dx$,
$Q' M' = dz$,
$M' M'' = ds$,
$P'' P''' = Q'' M''' = d(x + dx) = dx + ddx$,
$Q'' M'' = d.(z + dz) = dz + ddz$,
$M'' M''' = d.(s + ds) = ds + dds$;
Enfin le rayon de courbure au point $M'' = r + dr$.

Cherchons d'abord l'extension que tend à produire le chaînon inférieur m'.

Représentons la gravité g par la verticale $M'K$, et décomposons cette force en deux autres $M'h$ et $M'f$, dirigées dans le prolongement de deux côtés $M'M''$ et MM' de la courbe. Il est évident que la première de ces forces multipliée par la masse m' du chaînon inférieur, représentera l'extension cherchée. Or nous avons :

$$g : M'h :: \sin. hM'f = \frac{ds}{r} : \sin. M'Kh = \sin. (Q'M'M'' + fM'M'') = \frac{dx}{ds} + \frac{dz}{r};$$

d'où $M'h = \frac{grdx}{ds^2} + \frac{gdz}{ds}$;

et par conséquent $gm' \left(\frac{rdx}{ds^2} + \frac{dz}{ds}\right)$ représente le poids tendant à produire l'extension de la verge $M'M''$.

Quant à la compression que tend à produire le chaînon supérieur, il est évident qu'en représentant encore la gravité par la verticale $M''K$, et par $M''h'$ la gravité décomposée parallèlement à $M''M'$, nous aurons pour déterminer cette seconde force,

$$g : M''h' :: \frac{ds + dds}{r + dr} : \sin. Q''M''M''' = \frac{dx + ddx}{ds + dds};$$

d'où $M''h' = g. \left(\frac{dx + ddx}{ds + dds}\right)\left(\frac{r + dr}{ds + dds}\right)$;

et le poids qui représente la compression

$$= gm'' \left(\frac{(dx + ddx)\ (r + dr)}{(ds + dds)^2}\right).$$

Par conséquent, la force $M''h' - M'h = dT$, avec laquelle les chaînons contigus étendent ou compriment la verge qui les unit, a pour expression

$$dT = gm'' \left(\frac{(dx + ddx)\ (r + dr)}{(ds + dds)^2}\right) - gm' \left(\frac{rdx}{ds^2} + \frac{dz}{ds}\right);$$

ou bien, en faisant $m' = m'' = ds$,

$$dT = gds. \left[\left(\frac{(dx + ddx)\ (r + dr)}{(ds + dds)^2}\right) - \left(\frac{rdx}{ds^2} + \frac{dz}{ds}\right)\right];$$

laquelle, à cause de

$$\frac{(dx + ddx)(r + dr)}{(ds + dds)^2} - \frac{rdx}{ds^2} = d\left(\frac{rdx}{ds^2}\right),$$

se réduit à celle-ci :

$$dT = gd\left(\frac{rdx}{ds}\right) - gdz;$$

positive ou négative, suivant que la compression par m'' est plus grande ou moindre que l'extension par m'.

60. On voit que dT exprime ici la tension ou la compression *effective*, qu'éprouverait la verge qui joint deux chaînons consécutifs, si ces deux chaînons étaient seuls, ou, ce qui est la même chose, la différentielle de la tension ou de la compression qu'elle éprouve par l'action de tous les chaînons dont la chaîne est composée. Cette tension ou cette compression totale s'obtient donc par l'intégration de la formule précédente, qui donne

$$T + gA = \frac{grdx}{ds} - gz.$$

61. On voit également que la force T variera pour chacun des points de la courbe matérielle, et que, par conséquent, il y aura un point de cette courbe pour laquelle cette force sera un *maximum*, et pourra être représentée par (T'). **Cette pression ou cette tension varient d'un point à un autre.**

62. Si la ténacité spécifique de la verge qui unit deux chaînons consécutifs, ou plutôt, si la ténacité des chaînons contigus est plus grande que (T'), il est évident que la chaîne ne pourra, en aucun point de sa longueur, être étendue ou comprimée par l'action mutuelle des chaînons les uns sur les autres; et dans ce cas, son mouvement aura lieu sur la courbe donnée, comme si elle était inextensible et incompressible. **Équation de la courbe sur laquelle une chaîne en mouvement conserve sa forme primitive.**

63. Mais si la ténacité de la chaîne est moindre que (T'), il y aura quelque point de la courbe sur lequel les chaînons correspondans changeront de figure, en se contractant, ou en se

dilatant; et alors l'état de permanence dans lequel nous l'avions supposée, sera détruit.

64. Pour que cet état de permanence existe, il est donc nécessaire que la chaîne se meuve sur une courbe, telle que chacun de ses chaînons successifs éprouve à chaque instant une tension égale ou proportionnelle à la ténacité spécifique dont il est doué.

Ainsi nommant t cette ténacité spécifique sous l'unité de masse, celle de la verge ds qui joint deux chaînons consécutifs, aura pour expression tds; et, parce qu'on doit avoir $dT = tds$, l'équation de la courbe cherchée sera généralement

$$tds = d.\left(\frac{grdx}{ds}\right) - gdz,$$

qui devient par l'intégration

$$ts + gA = \frac{grdx}{ds} - gz.$$

Ce que devient cette équation, lorsque la ténacité de la chaîne est infiniment petite.

65. Supposons maintenant la ténacité t infiniment petite, c'est-à-dire, telle que le moindre effort puisse désunir deux chaînons contigus, ce qui est le cas des fluides parfaits; on a alors sensiblement $t = o$, et par conséquent

$$gA = \frac{grdx}{ds} - gz,$$

équation connue de la chaînette dans un plan vertical.

66. La section par l'axe d'un canal qui contient un fluide en mouvement, doit donc présenter une courbe funiculaire, pour qu'il n'existe à la surface de ce fluide ni intumescence ni dépression; c'est-à-dire, pour que cette surface soit exactement parallèle au fond du canal, et que l'écoulement soit stable (1).

Phénomène qui se manifeste à la surface d'un fluide, lorsque le fond du canal où il coule, n'est point *lintéaire*.

67. Lorsque l'intersection du fond du canal, par un plan vertical, n'est point une chaînette, ou plus généralement, lorsque

(1) Le C.en *Monge*, dans un mémoire *sur quelques effets d'attraction et de répulsion apparentes entre les molécules de matière*, inséré parmi ceux de l'Académie des sciences pour 1787, a déjà fait voir que la surface d'un fluide peut, dans certains cas, rester en équilibre, en affectant la courbure d'une lintéaire.

ce

ce fond n'est point une surface lintéaire, la superficie du fluide se tuméfie et se déprime en différens points par une suite nécessaire de l'inégalité des pressions auxquelles sont soumises ses tranches transversales, qui représentent ici les élémens d'une chaîne douée d'une flexibilité parfaite.

68. TELLE est la cause des ondulations et des rides qu'on remarque sur la surface d'une eau courante dont le lit n'est point réglé, lorsque ces ondulations ne sont produites ni par l'agitation de l'air, ni par l'application d'une autre force apparente.

Comment on détermine la courbe génératrice du fond d'un canal ouvert, tracé sur une surface donnée.

69. NOUS avons supposé jusqu'ici que la directrice du fond du canal était une courbe plane. Si l'on devait tracer cette directrice sur une surface donnée, il faudrait décomposer le poids de chaque tranche élémentaire du fluide en mouvement, dans le plan de deux élémens consécutifs de la courbe cherchée; considérant ensuite que cette tranche ne peut conserver une forme constante qu'autant qu'elle est sollicitée également à se comprimer ou à s'étendre par l'action du fluide contigu, on parviendrait à l'équation de la courbe funiculaire à double courbure, qu'affecterait librement une chaîne pesante dont les extrémités seraient fixes sur une surface quelconque.

Analogie entre l'écoulement stable d'un fluide et l'équilibre d'une voûte.

70. D'après tout ce qui précède, on voit que l'égalité de pression sur une tranche quelconque d'un fluide en mouvement par deux tranches contiguës, constitue la stabilité de l'écoulement du fluide, de même que l'égalité de pression qui a lieu sur les joints de lit de chacun des voussoirs qui composent une voûte, constitue l'équilibre de cette voûte. Voilà pourquoi la même courbe représente la loi suivant laquelle on doit disposer les tranches élémentaires d'un fluide et les tranches élémentaires d'une voûte, pour établir la stabilité de l'écoulement de l'un et l'équilibre de l'autre; avec cette différence, que la courbe dont il s'agit présente, dans l'un ou l'autre cas, sa concavité ou sa convexité à une même droite horizontale.



Position constante du centre de gravité d'une masse fluide dont l'écoulement est stable.

71. PUISQUE les eaux qui coulent à la surface de la terre, tendent sans cesse à régler les dimensions et la courbure de leur lit de manière à ce que leur écoulement acquière de la stabilité, il est évident qu'un courant quelconque, dont les extrémités sont fixes, passe successivement par différens états, dans chacun desquels son centre de gravité descend de plus en plus, jusqu'à ce qu'il soit le plus bas possible. Or la propriété d'avoir leur centre de gravité le plus bas possible, caractérise essentiellement les courbes funiculaires : donc l'axe d'un courant parvenu à un écoulement stable doit avoir pour axe une courbe de cette famille ; conséquence déduite des notions fondamentales de la statique, et qui confirme le résultat que nous a fourni la théorie développée dans ce mémoire.

Cas auquel la quantité d'eau d'un courant augmente ou diminue.

72. QUOIQUE nous ayons supposé jusqu'ici que la même quantité d'eau passait à chaque instant par les sections consécutives du canal, depuis son origine jusqu'à son embouchure, cependant cette théorie s'applique au cas où le volume du courant augmente ou diminue, suivant une certaine loi, soit qu'il reçoive des affluens, soit qu'on dérive par des saignées une partie de ses eaux, ou qu'il les perde par des filtrations. Il convient d'observer seulement que la courbe d'*écoulement stable,* dans cette hypothèse, n'est plus celle qu'affecterait une chaîne pesante de grosseur uniforme, mais une funiculaire dont les élémens varieraient entre ses extrémités comme les sections du courant dont il s'agit.

Lieu qu'occupe un fleuve *permanent* sur la surface terrestre.

73. IL suit de là que les fleuves, et, en général, tous les courans d'eau qui sillonnent librement la surface du globe et dont le lit est permanent, occupent sur cette surface le même lieu qu'y occuperait une chaîne pesante abandonnée à sa gravité, et assujettie à passer par la source et l'embouchure de ces courans ; or l'équation générale de l'équilibre de cette chaîne est donnée par les lois de la statique : on déterminerait donc rigoureusement la courbe des fleuves, si l'on pouvait combiner cette équation avec celle qui exprimerait la loi de variabilité de leurs sections transversales, et

celle de la portion de la surface terrestre sur laquelle leur lit est creusé.

74. SI, malgré les aspérités du globe, les eaux s'écoulent en décrivant les mêmes courbes qu'affecteraient des chaînes pesantes qui se plieraient librement sur la surface terrestre, supposée parfaitement polie, c'est parce que le frottement des eaux courantes sur les surfaces les plus dures s'anéantit, en quelque sorte, par la mobilité extrême de leurs molécules et la flexibilité de leurs filets élémentaires.

Funiculaires contiguës, lorsque le fleuve est traversé par des barrages.

75. LORSQU'UNE chaîne pesante est soutenue sur plusieurs points fixes entre ses deux extrémités, elle présente une suite de funiculaires contiguës, tellement disposées entre elles, que les tensions de part et d'autre d'un même point d'appui sont égales.

76. DE MÊME un fleuve ou un courant quelconque, dont le lit est traversé par des obstacles que l'action des eaux ne peut détruire, s'appuie sur ces obstacles comme sur des points fixes, et présente, lorsque son régime est permanent, une suite de funiculaires qui se font réciproquement équilibre : ainsi la question de la stabilité des fleuves se trouve ramenée à une question de mécanique analytique.

77. CONNAISSANT la loi générale suivant laquelle les eaux en mouvement tendent à établir le régime permanent de leur lit, on peut déterminer avec quelque certitude les changemens ultérieurs que des modifications quelconques dans les dimensions de ce lit apporteront à son régime ; question importante, dont l'art des constructions hydrauliques réclame continuellement la solution.

Considération du cas où le cours d'un fleuve embrasse un arc terrestre de plusieurs degrés.

78. NOUS n'avons pas besoin de dire que, dans la recherche des courbes d'*écoulement stable* à la surface de la terre, il faut supposer les directions de la pesanteur constamment perpendiculaires à cette surface, et par conséquent convergentes entre elles, lorsque ces courbes se développent sur un arc terrestre de plusieurs degrés ; supposition qui ne change point l'équation de la courbe,

si on la rapporte à un rayon vecteur, et à l'arc de cercle décrit du centre des pesanteurs par l'extrémité de ce rayon.

Différences notables entre les pentes uniformes et les pentes variables, comme les ordonnées d'une funiculaire.

79. On serait porté à croire, au premier aperçu, que les courbes d'*écoulement stable*, ayant toujours leurs ordonnées verticales très-petites par rapport à leurs abscisses, devraient se confondre sensiblement avec toute autre courbe qui ne jouirait pas de la même propriété, ou même avec une ligne droite terminée aux mêmes points; ce qui, en rendant à-peu-près indifférente la loi suivant laquelle on doit régler la pente des canaux, déterminerait naturellement à adopter la plus simple, c'est-à-dire, à établir un rapport constant entre les pentes et les longueurs correspondantes d'un même lit, ainsi qu'on l'a fait jusqu'à présent.

80. Cependant, si l'on conçoit une courbe funiculaire et sa sous-tendante tracées entre deux points donnés, à quelque distance que l'on suppose ces deux points, il sera aisé de reconnaître, par une application numérique, qu'il existe une différence plus ou moins sensible entre les ordonnées verticales de ces deux lignes correspondantes à la même abscisse; ce qui doit nécessairement en produire une dans le régime de deux canaux de même longueur, dont on aurait réglé le lit primitivement en prenant la funiculaire ou sa sous-tendante pour directrices : d'où il suit qu'il est toujours avantageux de distribuer les pentes conformément à la théorie.

Application numérique au canal de l'Ourcq.

81. Faisant, par exemple, cette application numérique au canal de l'Ourcq, dont le développement est de 96 kilomètres, et la pente totale de $10^{m}.14$, on trouvera qu'en la distribuant uniformément, elle serait de 0.211 pour chaque intervalle de deux kilomètres; tandis qu'en la distribuant suivant le rapport des ordonnées aux abscisses d'une funiculaire, elle serait de 0.42 sur les deux premiers kilomètres, à partir de la prise d'eau, et de 0.004 sur les deux derniers à l'embouchure du canal ; c'est-à-dire, double de la pente uniforme à la première de ces extrémités, et environ cinquante fois moindre à la seconde.

82. NOUS joignons à ce Mémoire, *pag. 43*, un tableau comparatif des hauteurs du fond de ce canal au-dessus d'un plan parallèle à l'horizon, à son extrémité inférieure; ces hauteurs étant prises à la même distance de cette extrémité dans les deux hypothèses, on voit qu'il existe entre elles des différences considérables.

Nous allons maintenant déterminer l'action qu'exerce une eau courante contre le fond et les parois de son lit.

De l'Action qu'exerce une Eau courante contre le fond et les parois de son lit.

83. POUR se former une idée exacte de l'action dont il s'agit, il faut remarquer qu'elle est précisément semblable à celle qu'exerce une lime en mouvement sur une substance quelconque. **Comment il faut considérer l'action d'un courant contre les parois de son lit.**

Or cette action, mesurée par l'effet qu'elle produit, est évidemment d'autant plus énergique, qu'on appuie la lime avec plus de force et qu'on la fait mouvoir avec plus de vîtesse.

Ainsi nommant P la pression de la lime sur la substance contre laquelle elle agit, et u la vîtesse qui lui est imprimée, sa quantité d'action sera $Pu = Q$.

Faisant donc la masse d'une tranche verticale de fluide en mouvement $= Mds$,

Sa vîtesse $= u$,

L'ordonnée verticale de la courbe du fond du lit au point occupé par la tranche $= z$,

L'abscisse correspondante $= x$,

L'arc de la courbe compris entre l'origine des coordonnées et le lieu de la tranche $= s$,

Enfin le rayon osculateur au même point $= r$,

La pression de la tranche fluide que l'on considère, sera

$$Mds\left(\frac{u^2}{r} + \frac{gdx}{ds}\right),$$

et par conséquent sa quantité d'action $Qds = Muds\left(\frac{u^2}{r} + \frac{gdx}{ds}\right)$.

Expression de cette action sur le fond d'un lit funiculaire en un point quelconque.

84. LORSQU'ON applique cette formule à déterminer la pression qui a lieu dans un plan vertical sur le fond d'un lit funiculaire, il faut substituer à la place de r sa valeur déduite de l'équation de la chaînette (art. 65)

$$A = \frac{rdx}{ds} - z,$$

ce qui donne

$$\frac{u^2}{r} + \frac{gdx}{ds} = \frac{u^2 dx}{(A+z)\,ds} + \frac{gdx}{ds};$$

donc,

$$Q = Mu\left[\frac{dx}{ds}\left(\frac{u^2}{A+z} + g\right)\right];$$

formule dans laquelle il ne s'agit plus que de mettre pour A sa valeur en fonction de la longueur de la funiculaire et de ses ordonnées.

Si l'on se rappelle qu'en supposant constant l'élément de la courbe, on a pour le rayon osculateur $r = -\frac{ds\;dz}{ddx}$, l'équation $A = \frac{rdx}{ds} - z$ deviendra

$$A = -\frac{dz\;dx}{ddx} - z,$$

laquelle donne, par son intégration,

$$Log.\,dx + Log.\,(A+z) = Log.\,B\,ds;$$

d'où l'on tire

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\sqrt{[(A+z)^2 - B^2]}}{\pm B}.$$

Supposons l'origine des coordonnées au point où l'axe des abscisses est tangent à la courbe, nous aurons en ce point $\frac{dz}{dx} = 0$, et $z = 0$; ce qui donne $A = B$, et par conséquent

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\sqrt{(2Az + zz)}}{\mp A},$$

d'où

$$\sqrt{(dx^2 + dz^2)} = \frac{(z+A)\,dz}{\sqrt{(2Az + zz)}};$$

équation qui, étant intégrée, devient

$$s = \sqrt{(2Az + zz)} + C.$$

La constante C est nulle, parce que s et z s'évanouissent en même temps. On voit de plus, que cette intégrale est complète, lorsque s exprime la longueur totale de la courbe, et z celle de la plus grande ordonnée. Faisant donc $s = S$, et $z = b$, nous aurons

$$S = \sqrt{(2Ab + bb)},$$

d'où l'on tire

$$A = \frac{SS - bb}{2b}.$$

Cette valeur de A substituée dans l'expression de Q, trouvée plus haut, la change en celle-ci:

$$Q = Mu\left[\frac{dx}{ds}\left(\frac{2bu^2}{SS - bb + 2bz} + g\right)\right].$$

Soit $u^2 = 2gh$; h étant la hauteur due à la vîtesse, on aura

$$Q = Mu\,\frac{gdx}{ds}\left(\frac{4hb}{SS - bb + 2bz} + 1\right);$$

ou bien encore, en substituant pour $\frac{dx}{ds}$ sa valeur $\frac{A}{A + z}$,

$$Q = Mug.\left(\frac{SS - bb}{SS - bb + 2bz}\right)\left(\frac{4hb}{SS - bb + 2bz} + 1\right).$$

85. Dans les cas ordinaires, la pente des fleuves peut être considérée comme très-petite par rapport à leur longueur; ce qui donne sensiblement $bb = 0$, $2bz = 0$, et réduit l'équation précédente à celle-ci:

$$Q = Mug;\ \text{d'où l'on tire}\ \frac{Q\,ds}{u} = Mgas,$$

qui indique que la pression sur le fond du lit, en un point quelconque, est égale au poids $Mgds$ de la tranche élémentaire du fluide correspondante en cé point. Or le poids de cette tranche est exprimé par le produit de sa pesanteur spécifique π, de sa largeur L, de sa hauteur verticale H, et de son épaisseur ds; on a donc

$$\frac{Q\,ds}{u} = \pi LHds.$$

Elle est proportionnelle à la hauteur du fluide en ce point.

86. SUPPOSANT constantes la largeur L du canal et la vîtesse u du courant, il est évident que la pression, et par conséquent l'action corrosive exercée sur le fond en un point quelconque, sont proportionnelles à la hauteur H du fluide en ce point. Or, quand le fond du canal est une surface lintéaire, la hauteur H est partout la même : donc ce fond éprouve par-tout la même pression; donc il est permanent en cet état, puisqu'il ne peut être corrodé en un point plutôt qu'en un autre.

87. EN GÉNÉRAL, si la courbure du fond du lit est infiniment petite, l'équation de l'art. 83

$$Q\,ds = Mu\,ds\left(\frac{u^2}{r} + \frac{g\,dx}{ds}\right)$$

se réduira toujours à celle-ci,

$$\frac{Q\,ds}{u} = \pi L H\,ds,$$

parce que, dans cette hypothèse, r est infini, et $dx = ds$; d'où l'on voit que chaque point du lit est pressé comme si le fluide était stagnant. Mais lorsque le fond de ce lit présente toute autre surface qu'une lintéaire, la hauteur du fluide est variable dans chacune de ses tranches élémentaires, la pression qu'il exerce sur le fond est inégale, et le lit est corrodé jusqu'à ce que, devenu lintéaire par l'action continuelle du courant, l'égalité de pression s'établisse sur tous ses points; ce qui détermine enfin sa *permanence*.

Cause de l'élargissement du lit des fleuves à leur embouchure.

88. TOUT ce que nous avons dit jusqu'ici, s'applique au cas où le sol dans lequel le lit est creusé, a par-tout la même consistance, et où ce lit conserve une forme prismatique; mais si l'on suppose cette consistance variable, il est clair que la permanence ne pourra s'établir, à moins qu'il n'y ait équilibre en un point quelconque entre l'action corrosive du courant et la ténacité du sol. Or cette action corrosive est, toutes choses égales d'ailleurs, proportionnelle à la profondeur du courant : cette profondeur doit donc être aussi proportionnelle à la ténacité; et comme la même quantité de fluide doit s'écouler à chaque instant par chacune des sections

sections du canal, il faut nécessairement qu'il s'élargisse là où sa profondeur est moindre, c'est-à-dire, là où le sol a moins de consistance. Voilà pourquoi la plupart des fleuves deviennent plus larges et moins profonds à leur embouchure, où leur lit est ordinairement établi sur des atterrissemens peu solides, ou souvent même à travers des bancs de sable.

89. CECI nous conduit à rechercher l'action du courant contre les parois latérales de son lit.

Action d'un courant contre ses parois latérales.

Supposons que la section de ces parois par un plan horizontal soit une courbe quelconque. Nommons x, y ses coordonnées, s l'arc correspondant, r son rayon de courbure, π la pesanteur spécifique de l'eau, H sa hauteur au-dessus de la section horizontale que nous considérons, u la vîtesse du courant.

Il est évident que la pression totale exercée en un point quelconque de cette courbe par le fluide en mouvement, se compose,

1.° De la pression qu'il exercerait s'il était stagnant,

2.° De la pression résultante de sa force centrifuge.

La première est, comme on sait, exprimée par $\pi H ds$.

Quant à la seconde, il est évident qu'elle est égale au produit de la masse $\frac{\pi H ds}{g}$ par la force centrifuge $\frac{u^2}{r}$.

Ainsi l'action corrosive $Q ds$, exercée contre un point quelconque de la paroi, est donnée par l'équation

$$Q ds = u ds \left(\pi H \pm \frac{\pi H u^2}{rg}\right),$$

et la pression contre ce point

$$\frac{Q}{u} = \pi H \pm \frac{\pi H u^2}{rg},$$

selon que la courbe des parois est concave ou convexe.

90. REMARQUONS, avant d'aller plus loin, que, quelle que soit la nature de cette courbe, si les deux parois sont parallèles, et

que l'on nomme $\frac{Q}{u}$ et $\frac{Q'}{u}$ les pressions qui ont lieu en même temps sur l'une et sur l'autre aux deux points opposés, leur somme $\frac{Q}{u} + \frac{Q'}{u}$ sera toujours constante et égale à $2\pi H$, ou, ce qui revient au même, égale à la pression qu'exercerait ce même courant contre ses deux parois supposées rectilignes et parallèles.

Condition de la stabilité de ces parois.

91. La condition de la stabilité des parois exige que la force corrosive Q soit moindre que la ténacité du sol τ; c'est-à-dire, que l'on ait toujours $\tau > Q$.

Ainsi, la quantité τ étant donnée en un point quelconque de la paroi concave d'un canal curviligne en fonction des coordonnées de la courbe qu'il affecte, cette courbe ne subira aucune altération tant que l'on aura

$$\tau ds > \pi H.u ds \left(\frac{u^2}{r} + 1\right),$$

et le sol pourra être regardé comme inattaquable. Mais à mesure que la quantité $\pi H \left(\frac{u^2}{rg} + 1\right)$ devient plus grande, τ restant le même, la résistance du sol et l'action corrosive du courant approchent de l'état d'équilibre exprimé par l'équation

$$\tau = \pi H u \left(\frac{u^2}{rg} + 1\right),$$

laquelle appartient à une courbe qui sert en quelque sorte de limite aux courbes d'*écoulement stable* entre des parois curvilignes.

Cas où les eaux en mouvement exercent la moindre action possible contre les parois de leur lit.

92. On voit qu'en regardant la vîtesse u comme uniforme le long de la paroi, la valeur de τ se compose toujours d'un terme variable $\frac{\pi H u^3}{rg}$, et d'un terme constant $\pi H u$.

Les variations de τ influent donc seulement sur le terme $\frac{\pi H u^3}{rg}$; d'où il suit qu'en supposant la ténacité du sol la moindre possible, il faut que l'on ait $\frac{\pi H u^3}{rg} = 0$; ce qui a lieu lorsque $r =$ infini,

ou lorsque la section horizontale de la paroi est une droite perpendiculaire à la direction du courant.

On a dans cette hypothèse $\frac{\tau}{u} = \pi H$; et la pression du fluide en mouvement contre les rives du canal qui le contient, est égale à celle qu'il exercerait s'il était en repos, c'est-à-dire, la moindre de celle qu'il peut produire à une profondeur donnée.

93. On tire des propositions qui précèdent, cette conclusion importante: que l'action d'un courant contre ses parois latérales diminue comme leur courbure, et que cette action est réduite à la moindre quantité possible, lorsque ses deux rives sont rectilignes et parallèles. Ces parois doivent être rectilignes et parallèles.

94. Or, comme on ne peut apprécier au juste la ténacité du sol dans lequel un canal artificiel doit être creusé, ni par conséquent déterminer rigoureusement la courbe de ses parois latérales, pour qu'il y ait équilibre entre cette ténacité et l'action corrosive du courant; et cependant, comme il importe de donner à ce canal une direction telle qu'elle éprouve les moindres changemens possibles, il s'ensuit qu'il y aura d'autant plus de chances en faveur de la stabilité de cette direction qu'elle sera moins sinueuse, et qu'en général il convient de tracer en ligne droite les canaux artificiels destinés à recevoir des eaux courantes, toutes les fois qu'on peut adopter ce parti sans avoir à vaincre de trop grandes difficultés.

95. Si, dans l'équation de la stabilité latérale Équation de la section horizontale des parois, lorsque leur ténacité est constante.

$$\tau = \pi H u \left(\frac{u^2}{rg} + 1 \right),$$

on suppose la ténacité constante et $= A$, on aura

$$r = \frac{\pi H u^3}{(A - \pi H u)} = constante;$$

donc alors la courbe cherchée est un arc de cercle.

96. Mais, si la ténacité du sol varie comme une fonction Équation de cette section, lorsque cette ténacité est variable.



quelconque des coordonnées de la courbe cherchée, on aura $\tau = F.\ (x,y)$, et par conséquent

$$\frac{u^3}{rg} = \frac{F.\ (x,y)}{\pi H} - u;$$

équation générale des courbes élastiques, comme il est aisé de s'en assurer.

Les bornes que nous devons prescrire à ce Mémoire, ne nous permettent pas de pousser plus loin ces recherches. Nous le terminerons par une application de la théorie qu'il contient, à quelques expériences sur le mouvement des eaux dans les tuyaux de conduite.

Application de la Théorie à quelques Expériences.

Application de notre théorie aux expériences du C.en *Bossut.*

97. LES expériences dont il s'agit, ayant été faites au moyen de tuyaux rectilignes, la force centrifuge de l'eau en mouvement dans ces tuyaux est nulle ; ce qui fait disparaître les termes $\theta u^2, \theta' u^2, \theta'' u^2$, de la formule que nous avons trouvée (art. 52), et la réduit à celle-ci :

$$(\Phi) = \frac{g\,(z + z' + z'' + \&c.) - gf.\,(\sigma + \sigma' + \sigma'' + \&c.)}{s + s' + s'' + \&c.} - Ru^2,$$

dans laquelle

$z + z' + z'' + \&c.$ représentent la hauteur verticale de l'extrémité supérieure d'un tuyau de conduite au-dessous de son embouchure ;

$\sigma + \sigma' + \sigma'' + \&c.$, sa projection horizontale ;

$s + s' + s'' + \&c.$, son développement ;

u, la vîtesse de l'eau dans le tuyau ;

R et f des coëfficiens constans à déterminer par l'expérience ;

enfin (Φ) la force accélératrice dont le fluide est animé.

Il est manifeste, à la simple inspection de cette formule, que la force accélératrice diminue de plus en plus, à mesure que la vîtesse

augmente, et qu'enfin cette force accélératrice étant devenue infiniment petite ou nulle, la vîtesse est uniforme : on a alors

$$\frac{g(z+z'+z''+\&c.)-gf.(\sigma+\sigma'+\sigma''+\&c.)}{s+s'+s''+\&c.}-Ru^2=0;$$

équation entre cette vîtesse et les quantités qui expriment la pente, les sinuosités horizontales, et le développement du tuyau de conduite.

98. Le C.en *Bossut* a rapporté, dans le second volume de son *Hydrodynamique*, une suite d'expériences entreprises par lui, pour reconnaître la loi suivant laquelle les dépenses d'un tuyau de conduite varient sous la même charge, lorsqu'on fait varier sa longueur.

Il fit d'abord adapter au fond d'un réservoir où l'on entretenait l'eau à une hauteur constante, un tuyau horizontal à l'extrémité duquel on recevait le fluide qui s'écoulait.

Ainsi l'on pouvait connaître exactement la dépense du réservoir en un temps donné; et divisant cette dépense en une seconde par la section du tuyau, on avait la vîtesse réelle de l'écoulement.

La simplicité de cet appareil, et des expériences auxquelles il était employé, garantit l'exactitude des résultats.

Pour faire à ces expériences l'application de notre formule, je remarque que l'eau contenue dans le tuyau horizontal est pressée par l'eau du réservoir, précisément de la même manière que si un tuyau vertical de même diamètre que le premier, était substitué au réservoir et entretenu constamment plein à la même hauteur.

Par conséquent, le fluide en mouvement dans les expériences dont il s'agit, peut être regardé comme une chaîne pesante, dont une portion verticale, abandonnée à sa pesanteur, imprime un certain mouvement à la portion horizontale restante.

Dans ce cas particulier, z, z'', z''' &c. $=0$; σ', σ'', σ''' &c. $=0$; s'', s''' &c. $=0$; $\sigma=s$, $z'=s'$;

Et la formule générale devient

$$\frac{gz'-fgs}{s+z'}-Ru^2=0.$$

On a d'abord employé un tuyau de 16 lignes, ou de 36 millimètres de diamètre.

On a fait varier sa longueur de $9^m.74$ à $58^m.47$ par cinq différences constantes; ce qui a donné six expériences dans lesquelles la charge est restée de 324 millimètres, et dont chacune a fourni une équation de cette forme :

$$\frac{ga - gfs}{a + s} - Ru^2 = 0.$$

Ces six équations combinées deux à deux, ont donné 15 valeurs de *R*, et 15 valeurs de *f*, rapportées dans les 2.e et 3.e colonnes du tableau n.o II.

Conservant toujours les mêmes longueurs, on a ensuite doublé la charge à la tête du tuyau; ce qui a donné six nouvelles équations, et 15 nouvelles valeurs de *R* et de *f*, indiquées dans les 5.e et 6.e colonnes.

Enfin, tout restant le même que dans les deux premières séries d'expériences, on a substitué un tuyau de 54 millimètres de diamètre à celui de 36, et sous une charge de 324, et de 649 millimètres : on a obtenu douze résultats formant deux nouvelles séries, dont chacune a fourni 15 valeurs de *R* et de *f*, disposées dans les 8.e, 9.e, 11.e et 12.e colonnes du même tableau.

Accord de nos formules avec les conclusions que le C.en *Bossut* a tirées de ses expériences.

99. On voit par la comparaison de toutes les valeurs de *R* prises dans la même série, qu'elles varient très-peu d'une expérience à l'autre; observation qui, s'appliquant également aux valeurs de *f*, prouve évidemment la vérité de la formule d'où ces valeurs sont dérivées, et par conséquent de la théorie qui nous y a conduits.

Le frottement *f*, occasionné par la pression de l'eau contre les parois du tuyau qui la contient, produit, comme on voit, une résistance beaucoup moindre que celle Ru^2 proportionnelle au carré de la vîtesse d'écoulement.

On peut donc ici négliger le terme *fgs* de la formule

$$\frac{ga - fgs}{a + s} - Ru^2 = 0.$$

Et parce que la charge d'eau, exprimée par *a*, peut être regardée, dans toutes les expériences précédentes, comme très-petite par rapport à la longueur *s* du tuyau, on a sensiblement

$$\frac{ga}{s} - Ru^2 = 0,$$

d'où l'on tire

$$u = \frac{\sqrt{(ga)}}{Rs};$$

c'est-à-dire que la vîtesse d'écoulement par un tuyau horizontal de longueur donnée, est en raison inverse de la racine carrée de cette longueur; conclusion à laquelle le C.en *Bossut* était déjà parvenu, en cherchant par une méthode d'interpolation appliquée aux mêmes expériences, « si pour une même hauteur de » réservoir, les dépenses par un tuyau horizontal d'un diamètre » constant, mais de longueur variable, n'étaient point propor» tionnelles à une certaine puissance de ces longueurs. » (*Hydrodynamique*, tome II, pag. 141.)

Application de notre théorie aux expériences de *Dubuat*.

100. Les valeurs de *R* et de *f*, indiquées dans le tableau n.° II, ont été conclues d'expériences dans lesquelles la charge d'eau et les pentes sont restées les mêmes sous des longueurs différentes. Nous avons rapporté, dans le tableau n.° III, les valeurs de *R* et de *f* tirées de quelques expériences de *Dubuat*, dans lesquelles il a fait varier les charges et les pentes sous une même longueur.

Le tuyau qu'il a employé avait 27 millimètres de diamètre, sur environ 20 mètres de longueur.

Ces expériences, au nombre de dix, étant combinées deux à deux, au moyen de la formule

$$g\,\frac{(z + z') - fgs}{z + b} - Ru^2 = 0,$$

dans laquelle z exprime la charge d'eau, z' la pente, b la longueur constante du tuyau, et s sa projection horizontale, qui est ici sensiblement égale à b, on a obtenu 36 valeurs de *R* et de *f*, très-peu



différentes entre elles : ainsi nos formules reçoivent des expériences de *Dubuat* une nouvelle confirmation.

Loi qui paraît lier ces expériences à celles du C.en *Bossut.*

101. Si l'on compare les valeurs moyennes de *R* déduites des expériences du C.en *Bossut*, où l'eau s'écoule par un tuyau de 54 millimètres de diamètre, aux valeurs moyennes de *R* déduites des expériences de *Dubuat*, où l'eau s'écoule par un tuyau d'un diamètre sous-double, on remarque que ces valeurs moyennes sont à très-peu près comme 1 et 4, ou en raison inverse de la superficie de l'orifice des tuyaux.

On ne peut cependant encore tirer de cette observation aucune conclusion générale sur la loi qui lie les variations du diamètre des tuyaux de conduite à celles du coèfficient *R*, parce que, dans les expériences comparées, on n'a point tenu compte du degré de poli de l'intérieur des différens tuyaux; circonstance qui a dû nécessairement influer plus ou moins sur le résultat de leur comparaison.

NOTE

Note sur le Tracé de la Chaînette.

Si l'on prènd pour origine des coordonnées le point de la chaînette où sa tangente est horizontale, et cette tangente pour axe des abscisses, l'équation finie de cette courbe est, comme on sait (art. 84) :

$$x = \pm A \, log. \left(\frac{A + z + \sqrt{(z^2 + 2Az)}}{A} \right).$$

On a aussi, en appelant s l'arc correspondant aux coordonnées x et z (art. 84),

$s = \sqrt{(2Az + zz)}$, ou bien $ss = 2Az + zz$;

c'est-à-dire que le rapport entre l'arc et l'ordonnée de la chaînette est le même que celui entre l'ordonnée et l'abscisse de l'hyperbole équilatère rapportée à son second axe.

Mais lorsque la longueur de la chaînette est très-grande par rapport à son ordonnée verticale, l'abcisse x diffère infiniment peu de l'arc s correspondant ; on a donc, à cause de $x = s$,

$$x = \sqrt{(2Az + zz)} \text{ et } A = \frac{xx - zz}{2z},$$

d'où l'on tire

$$z = -A + \sqrt{(A^2 + xx)}.$$

Pour déterminer la constante A qui convient au cas particulier du canal de l'Ourcq, il faut se rappeler que sa longueur développée est de 96,000 mètres, et sa pente totale de $10^m,140$, ce qui donne

$$A = \frac{(96000)^2 - (10,14)^2}{2(10,14)} = 454437864.752485;$$

et par conséquent

$$z = -454437864.752485 + \sqrt{(206513772920797848.71 + x^2)},$$

formule au moyen de laquelle on trouve, en faisant successivement $x = 0$, $x = 1000$, $x = 2000$ $x = 3000$, &c. les valeurs de z correspondantes à chaque kilomètre, à partir de l'extrémité inférieure de ce canal.

Si l'on appelle Z une ordonnée verticale quelconque de la ligne droite menée par les deux extrémités de la chaînette, on aura pour le cas particulier du canal de l'Ourcq,

$$Z = \frac{x.\ (10,140)}{96,000}.$$

Nous avons disposé dans les 3.ᵉ et 5.ᵉ, 9.ᵉ et 11.ᵉ colonnes du tableau n.° I, les valeurs de z et de Z correspondantes à la même abscisse; et dans les 6.ᵉ et 12.ᵉ colonnes, les différences entre les ordonnées verticales de la chaînette et de sa sous-tendante : ce qui offre le moyen de comparer immédiatement les hauteurs du fond du canal de l'Ourcq dans les deux systèmes de distribution de pentes.

TABLEAU n.° I. *Distribution des pentes du canal de l'Ourcq, suivant les ordonnées d'une* Funiculaire *et de sa sous-tendante.*

Formules générales. $\begin{cases} z = -A + \sqrt{(A^2 + x^2)}, \\ Z = \dfrac{x\,(10,14)}{96000}. \end{cases}$

Valeurs de x.	Valeurs de $\sqrt{(A^2 + x^2)}$.	Valeurs de z.	Différences 1.res	Valeurs de Z.	Valeurs de $Z - z$.
0,000.	454437864.752485.	0.000000.	0.001101.	0.000000.	0.000000.
1,000.	454437864.753585.	0.001101.	0.003294.	0.105625.	0.104524.
2,000.	864.756880.	0.004395.	0.005507.	0.211250.	0.206851.
3,000.	762387.	0.009902.	0.007702.	0.316875.	0.306973.
4,000.	770089.	0.017604.	0.009902.	0.422500.	0.404896.
5,000.	779991.	0.027506.	0.012103.	0.528125.	0.500619.
6,000.	792094.	0.039609.	0.014304.	0.633750.	0.594141.
7,000.	806398.	0.053913.	0.016504.	0.739375.	0.685462.
8,000.	822902.	0.070417.	0.018704.	0.845000.	0.774583.
9,000.	841606.	0.089121.	0.020905.	0.950625.	0.861504.
10,000.	862511.	0.110026.	0.023106.	1.056250.	0.946224.
11,000.	885617.	0.133132.	0.025305.	1.161875.	1.028743.
12,000.	910922.	0.158437.	0.027507.	1.267500.	1.009063.
13,000.	938429.	0.185944.	0.029707.	1.373125.	1.187181.
14,000.	968136.	0.215651.	0.031908.	1.478750.	1.263099.
15,000.	865.000044.	0.247559.	0.034108.	1.584375.	1.336816.
16,000.	034152.	0.281667.	0.036308.	1.690000.	1.408333.
17,000.	070460.	0.317975.	0.038509.	1.795625.	1.477650.
18,000.	108969.	0.356484.	0.040710.	1.901250.	1.544766.
19,000.	149679.	0.397194.	0.042910.	2.006875.	1.609681.
20,000.	192589.	0.440104.	0.045111.	2.112500.	1.672396.
21,000.	237700.	0.485215.	0.047311.	2.218125.	1.734910.
22,000.	285011.	0.532526.	0.049512.	2.323750.	1.791224.
23,000.	334523.	0.582038.	0.051712.	2.429375.	1.847337.
24,000.	386235.	0.633750.	0.053913.	2.535000.	1.901250.
25,000.	440148.	0.687663.	0.056113.	2.640625.	1.952962.
26,000.	496261.	0.743776.	0.058314.	2.746250.	2.002474.
27,000.	554575.	0.802090.	0.060514.	2.851875.	2.049785.
28,000.	615089.	0.862604.	0.062715.	2.957500.	2.094896.
29,000.	677804.	0.925319.	0.064915.	3.063125.	2.137806.
30,000.	742719.	0.990234.	0.067116.	3.168750.	2.178516.
31,000.	809835.	1.057350.	0.069316.	3.274375.	2.267025.
32,000.	879151.	1.126666.	0.071517.	3.380000.	2.253334.

Suite du Tableau n.° I. *Distribution des pentes du canal de l'Ourcq, suivant les ordonnées d'une* Funiculaire *et de sa sous-tendante.*

Formules générales. $\left\{ \begin{array}{l} z = -A + \sqrt{(A^2 + x^2)}, \\ Z = \dfrac{x\,(10,\ 14)}{96000}. \end{array} \right.$

Valeurs de x.	Valeurs de $\sqrt{(A^2 + x^2)}$.	Valeurs de z.	Différences 1.res	Valeurs de Z.	Valeurs de $Z - z$.
33,000.	454437865.950668.	1.198183.	0.073718.	3.485625.	2.287442.
34,000.	866.024386.	1.271901.	0.075908.	3.591250.	2.319349.
35,000.	100304.	1.347819.	0.078118.	3.696875.	2.349056.
36,000.	178422.	1.425937.	0.080320.	3.802500.	2.376563.
37,000.	258742.	1.506257.	0.082520.	3.908125.	2.401868.
38,000.	341262.	1.588777.	0.084720.	4.013750.	2.424973.
39,000.	425982.	1.673497.	0.086920.	4.119375.	2.445878.
40,000.	512902.	1.760417.	0.089121.	4.225000.	2.464583.
41,000.	602023.	1.849538.	0.091321.	4.330625.	2.481087.
42,000.	693344.	1.940859.	0.093523.	4.436250.	2.495391.
43,000.	786867.	2.034382.	0.095722.	4.541875.	2.507493.
44,000.	882589.	2.130104.	0.097924.	4.647500.	2.517396.
45,000.	980513.	2.228028.	0.100123.	4.753125.	2.525097.
46,000.	867.080636.	2.328151.	0.102324.	4.858750.	2.530599.
47,000.	182960.	2.430475.	0.104525.	4.964375.	2.533900.
48,000.	287485.	2.535000.	0.106725.	5.070000.	2.535000.
49,000.	394210.	2.641725.	0.108926.	5.175625.	2.533900.
50,000.	503136.	2.750651.	0.111127.	5.281250.	2.530599.
51,000.	614263.	2.861778.	0.113326.	5.386875.	2,525097.
52,000.	727589.	2.975104.	0.115528.	5.492500.	2.517396.
53,000.	843117.	3.090632.	0.117727.	5.598125.	2.507493.
54,000.	960844.	3.208359.	0.119928.	5.703750.	2.495391.
55,000.	868.080772.	3.328287.	0.122129.	5.809375.	2.481087.
56,000.	202901.	3.450416.	0.124330.	5.915000.	2.464584.
57,000.	327231.	3.574746.	0.126531.	6.020625.	2.445878.
58,000.	453762.	3.701277.	0.128730.	6.126250.	2.424974.
59,000.	582492.	3.830007.	0.130931.	6.231875.	2.401868.
60,000.	713423.	3.960938.	0.133131.	6,337500.	2.376562.
61,000.	846554.	4.094069.	0.135332.	6.443125.	2.349056.
62,000.	981886.	4.229401.	0.137532.	6.548750.	2.319349.
63,000.	869.119418.	4.366933.	0.139733.	6.654375.	2,287442.
64,000.	259151.	4.506666.	0.141933.	6.760000.	2.253334.

SUITE du TABLEAU n.° I. *Distribution des pentes du canal de l'Ourcq, suivant les ordonnées d'une* **Funiculaire** *et de sa sous-tendante.*

Formules générales. $\begin{cases} z = -A + \sqrt{(A^2 + x^2)}, \\ Z = \dfrac{x\,(10,14)}{96000}. \end{cases}$

Valeurs de x.	Valeurs de $\sqrt{(A^2 + x^2)}$.	Valeurs de z.	Différences 1.res	Valeurs de Z.	Valeurs de $Z - z$.
65,000.	454437869.401084.	4.648599.	0.144135.	6.865625.	2.217025.
66,000.	869.545219.	4.792734.	0.146334.	6.971250.	2.178516.
67,000.	691553.	4.939068.	0.148536.	7.076875.	2.137806.
68,000.	840089.	5.087604.	0.150741.	7.182500.	2.094896.
69,000.	990830.	5.248345.	0.152931.	7.288125.	2.049785.
70,000.	870.143761.	5.391276.	0.155137.	7.393750.	2.002474.
71,000.	298898.	5.546413.	0.157337.	7.499375.	1.952962.
72,000.	456235.	5.703750.	0.159537.	7.605000.	1.901250.
73,000.	615772.	5.863287.	0.161739.	7.710625.	1.847337.
74,000.	777511.	6.025026.	0.163935.	7.816250.	1.791224.
75,000.	941450.	6.188965.	0.166139.	7.921875.	1.734910.
76,000.	871.107589.	6.355104.	0.168341.	8.027500.	1.672396.
77,000.	275930.	6.523445.	0.170539.	8.133125.	1.609681.
78,000.	446469.	6.693984.	0.172741.	8.238750.	1.544766.
79,000.	619210.	6.866725.	0.174941.	8.344375.	1.477650.
80,000.	794151.	7.041666.	0.177142.	8.450000.	1.408334.
81,000.	971293.	7.218808.	0.179343.	8.555625.	1.336816.
82,000.	872.150636.	7.398151.	0.181543.	8.661250.	1.263099.
83,000.	332179.	7.579694.	0.183744.	8.766875.	1.187181.
84,000.	515923.	7.763438.	0.185943.	8.872500.	1.109062.
85,000.	701866.	7.949381.	0.188145.	8.978125.	1.028743.
86,000.	890011.	8.137526.	0.190346.	9.083750.	0.946224.
87,000.	873.080357.	8.327872.	0.192545.	9.189375.	0.861504.
88,000.	272902.	8.520417.	0.194746.	9.295000.	0.774583.
89,000.	467648.	8.715163.	0.196946.	9.490625.	0.685462.
90,000.	664594.	8.912109.	0.199147.	9.506250.	0.594141.
91,000.	863741.	9.111256.	0.201348.	9.611875.	0.500619.
92,000.	874.065089.	9.312604.	0.203545.	9.717500.	0.404896.
93,000.	268634.	9.516149.	0.205747.	9.823125.	0.306973.
94,000.	474381.	9.721896.	0.207952.	9.928750.	0.206855.
95,000.	682333.	9.929848.	0.210152.	10.034375.	0.104524.
96,000.	892485.	10.140000.		10.140000.	0.000000.

TABLEAU n.° II. Expériences de *Bossut* (Hydrodynamique, *tom. II, pag. 135*).

TUYAU DE 0.036 Mèt. DE DIAMÈTRE.					TUYAU DE 0.054 Mèt. DE DIAMÈTRE.				
COTES des Expériences.	HAUTEUR constante de l'eau dans le réservoir = *a*.	LONGUEURS variables du tuyau = *s*.	DÉPENSES par seconde en pouces cubes.	CARRÉ de la vîtesse = u^2	COTES des Expériences.	HAUTEUR constante de l'eau dans le réservoir = *a*.	LONGUEURS variables du tuyau = *s*.	DÉPENSE par seconde en pouces cubes.	CARRÉ de la vîtesse = u^2
A.	0.324838.	9.745.	46.30.	1.27703.	M.	0.324838.	9.745.	128.00.	1.21645.
B.		19.490.	32.62.	0.63375.	N.		19.490.	92.73.	0.63848.
C.		29.235.	26.45.	0.41676.	O.		29.235.	75.57.	0.42397.
D.		38.981.	22.52.	0.30203.	P.		38.981.	65.73.	0.32081.
E.		48.726.	19.63.	0.22963.	Q.		48.726.	58.10.	0.25062.
F.		58.471.	17.53.	0.18313.	R.		58.471.	51.98.	0.20063.
G.	0.649676.	9.745.	67.77.	2.73573.	S.	0.649676.	9.745.	186.98.	2.59586.
H.		19.490.	48.13.	1.38017.	T.		19.490.	136.50.	1.38338.
I.		29.235.	39.20.	0.91540.	U.		29.235.	113.53.	0.95702.
J.		38.981.	33.52.	0.66921.	V.		38.981.	98.08.	0.71428.
K.		48.726.	29.37.	0.51375.	X.		48.726.	87.20.	0.56456.
L.		58.471.	26.38.	0.41467.	Y.		58.471.	78.50.	0.45752.

Suite du Tableau n.° II. Expériences de *Bossut* (Hydrodynamique, *tom. II, pag. 135*).

Formule générale : $\frac{ga - gfs}{a + s} - Ru^2 = 0.$

	Cotes des Expériences comparées.	Valeurs de *R*.	Valeurs de *fg*.		Cotes des Expériences comparées.	Valeurs de *R*.	Valeurs de *fg*.
Première Série d'Expériences.	A B.	0.241961.	0.007669.	Troisième Série d'Expériences.	M N.	0.268775.	0.010887.
	A C.	0.242677.	0.006725.		M O.	0.263152.	0.003819.
	A D.	0.241648.	0.008168.		M P.	0.262689.	0.003235.
	A E.	0.240316.	0.009841.		M Q.	0.260345.	0.000291.
	A F.	0.239965.	0.010303.		M R.	0.258202.	0.002402.
	B C.	0.244849.	0.005810.		N O.	0.247611.	0.002843.
	B D.	0.240838.	0.008393.		N P.	0.251302.	0.004477.
	B E.	0.237622.	0.010464.		N Q.	0.247411.	0.002972.
	B F.	0.237032.	0.010843.		N R.	0.243816.	0.005304.
	C D.	0.233194.	0.010721.		O P.	0.259110.	0.002052.
	C E.	0.229166.	0.012419.		O Q.	0.247164.	0.003034.
	C F.	0.229699.	0.012194.		O R.	0.240137.	0.006046.
	D E.	0.222752.	0.013901.		P Q.	0.229635.	0.007457.
	D F.	0.226332.	0.012820.		P R.	0.223816.	0.009339.
	E F.	0.231858.	0.011796.		Q R.	0.215621.	0.010993.
		0.235994.	0.010137.			0.247919.	0.005010.
Deuxième Série d'Expériences.	G H.	0.219156.	0.014412.	Quatrième Série d'Expériences.	S T.	0.244102.	0.021974.
	G I.	0.219917.	0.012192.		S U.	0.243460.	0.020195.
	G J.	0.219173.	0.014362.		S V.	0.240092.	0.010871.
	G K.	0.218397.	0.017203.		S X.	0.238134.	0.005448.
	G L.	0.218095.	0.017553.		S Y.	0.236101.	0.000318.
	H I.	0.222232.	0.010025.		T U.	0.241554.	0.018330.
	H J.	0.219207.	0.014339.		T V.	0.232455.	0.005325.
	H K.	0.216638.	0.018003.		T X.	0.228810.	0.000114.
	H L.	0.216486.	0.018220.		T Y.	0.225446.	0.004694.
	I J.	0.213398.	0.018291.		U V.	0.216171.	0.006501.
	I K.	0.210030.	0.021443.		U X.	0.214655.	0.007984.
	I L.	0.211029.	0.020508.		U Y.	0.211353.	0.011214.
	J K.	0.204646.	0.024246.		V X.	0.212176.	0.009402.
	J L.	0.208706.	0.021479.		V Y.	0.206745.	0.013345.
	K L.	0.215125.	0.018791.		X Y.	0.199102.	0.016881.
	Valeur moyenne.	0.216415.	0.017404.			0.226023.	0.010173.

TABLEAU n.° III. Expériences de *Dubuat* (Principes d'Hydraulique, *tom. II, pag. 22*).

COTES des Expériences.	LONGUEUR constante du tuyau = b.	CHARGE d'eau à la tête du tuyau = z.	PENTE du tuyau = z'.	SOMME de la charge et de la pente = $z + z'$.	CARRÉ de la vitesse = u^2.
A.		0.004057.	0.003925.	0.007982.	0.001850.
B.		0.013531.	0.012804.	0.026335.	0.009616.
C.		0.113694.	0.107527.	0.221221.	0.079807.
D.		0.160525.	0.147176.	0.307701.	0.129915.
E.		0.210605.	0.197804.	0.408409.	0.167347.
F.	19.95055.	0.242547.	0.226865.	0.469412.	0.202534.
G.		0.333501.	0.311047.	0.644548.	0.292849.
H.		0.370859.	0.346003.	0.716862.	0.322234.
I.		0.391221.	0.368091.	0.763312.	0.350039.
J.		0.641558.	0.593943.	0.235501.	0.602787.

SUITE

Suite du Tableau n.° III.

Formule générale, $g\,\dfrac{(z + z') - gfb}{z + b} - Ru^2 = 0.$

	COTES des Expériences comparées.	VALEURS de *R*.	VALEURS de *fg*.
1.re Série.	A B.	1.1606372.	0.0017767.
	A C.	1.3370562.	0.0014502.
	A D.	1.1413532.	0.0018124.
	A E.	1.1770248.	0.0017463.
	A F.	1.1167636.	0.0018579.
	A G.	1.0577593.	0.0019671.
	A H.	1.0678759.	0.0019483.
	A I.	1.0457351.	0.0019893.
	A J.	0.9737037.	0.0021226.
	Moyennes.	1.119763.	0.0018523.
2.e Série.	B C.	1.3564725.	0.0001080.
	B D.	1.1401176.	0.0019744.
	B E.	1.1778251.	0.0016115.
	B F.	1.1150182.	0.0022160.
	B G.	1.0549423.	0.0027942.
	B H.	1.0656122.	0.0026915.
	B I.	1.0431636.	0.0029076.
	B J.	0.9713300.	0.0036141.
	Moyennes.	1.1155600.	0.0022127.
3.e Série.	C D.	0.8386694.	0.0414516.
	C E.	1.0357990.	0.0256296.
	C F.	0.9782827.	0.0302459.
	C G.	0.9570067.	0.0319536.
	C H.	0.9826734.	0.0414721.
	C I.	0.9638136.	0.0314578.
	C J.	0.9210800.	0.0348371.
	Moyennes.	0.9538135.	0.0338639.

	COTE des Expériences comparées.	VALEURS de *R*.	VALEURS de *fg*.
4.e Série.	D E.	0.8386694.	0.0414516.
	D F.	1.0738851.	0.0187330.
	D G.	0.9929780.	0.0212434.
	D H.	1.0197852.	0.0177327.
	D I.	0.9911139.	0.0214875.
	D J.	0.9295940.	0.0295442.
	Moyennes.	0.9743376.	0.0250320.
5.e Série.	E F.	0.8358610.	0.0595788.
	E G.	0.9025812.	0.0481584.
	E H.	0.9531334.	0.0396093.
	E I.	0.9288394.	0.0437178.
	E J.	0.8985570.	0.0488390.
	Moyennes.	0.9037944.	0.0479807.
6.e Série.	F G.	0.9283936.	0.0404731.
	F H.	0.9872819.	0.0284013.
	F I.	0.9507917.	0.0358816.
	F J.	0.9039556.	0.0454818.
	Moyennes.	0.9426057.	0.0375594.
7.e Série.	G H.	0.9283936.	0.0404731.
	G I.	0.9858660.	0.0233613.
	G J.	0.8969584.	0.0498330.
	Moyennes.	0.9370727.	0.0378891.
8.e Série.	H I.	0.7943824.	0.0917152.
	H J.	0.8689642.	0.0672353.
	Moyennes.	0.8316733.	0.0794752.
9.e Série.	I. J.	0.8770646.	0.0622004.

Valeurs réduites de
$R = 1.0036910.$
$fg = 0.0254793.$
$f = 0.0025975.$

APPENDICE.

La théorie des eaux courantes, développée dans le Mémoire précédent, est fondée, comme on l'a vu, sur l'analogie que nous avons supposée exister entre un courant d'eau et une chaîne pesante, incompressible et douée d'une flexibilité parfaite; mais comme cette supposition, toute plausible qu'elle paraît, lorsqu'elle a été soumise à un examen approfondi, est cependant de nature à n'être admise généralement qu'autant qu'on aura fait voir l'identité des résultats auxquels elle conduit, avec ceux que fournit la théorie rigoureuse du mouvement des fluides, je me suis occupé de cette recherche, et j'ai pensé qu'on ne verrait pas sans quelque intérêt comment la question que nous avons traitée, présente entre la mécanique des corps solides et celle des fluides, un point de contact qui n'avait point encore été aperçu.

Si l'on appelle

k la densité d'une molécule fluide,

t le temps écoulé depuis le premier instant de son mouvement,

x, y, z, ses trois coordonnées rapportées à trois plans perpendiculaires entre eux,

p la pression qu'elle éprouve,

v, v', v'', les vîtesses de la molécule respectivement parallèles aux trois axes des coordonnées,

X, Y, Z, les trois forces accélératrices qui, en vertu des puissances parallèles à ces trois axes, seraient, à la fin du temps t, imprimées à la molécule, si elle était parfaitement libre,

Φ, Φ', Φ'', les forces accélératrices dont elle est réellement animée parallèlement à ces trois axes,

g la force accélératrice de la pesanteur terrestre;

Si, de plus, on désigne par δp, δx, δy, δz, les différences

contemporaines de pression et de position de deux molécules infiniment voisines;

Et par dx, dy, dz, les différences qui se rapportent à deux positions de la même molécule dans deux instans consécutifs de son mouvement; on a, comme on sait, pour en déterminer les circonstances, les deux équations

$$\left(\frac{d.\,kv}{dx}\right)+\left(\frac{d.\,kv'}{dy}\right)+\left(\frac{d.\,kv''}{dz}\right)+\left(\frac{dk}{dt}\right)=0,$$

$$\frac{\delta p}{k}=X\delta x+Y\delta y+Z\delta z-(\Phi\delta x+\Phi'\delta y+\Phi''\delta z),$$

qui, dans l'hypothèse de l'incompressibilité, ou de $k=1$, deviennent (1)

$$\left(\frac{dv}{dx}\right)+\left(\frac{dv'}{dy}\right)+\left(\frac{dv''}{dz}\right)=0 \ldots\ldots (A),$$

$$\delta p=X\delta x+Y\delta y+Z\delta z-(\Phi\delta x+\Phi'\delta y+\Phi''\delta z)\ldots (B).$$

Supposons l'axe des z vertical, et appliquons ces deux formules au mouvement d'un fluide incompressible et pesant, renfermé dans un tuyau étroit, de courbure quelconque, de grosseur uniforme, et fixe de position dans l'espace;

Nous aurons d'abord $X=0$, $Y=0$, $Z=-g$.

Considérant ensuite que chaque molécule est assujettie à se mouvoir parallèlement à la *directrice* du tuyau, on voit que l'équation de continuité

$$\left(\frac{dv}{dx}\right)+\left(\frac{dv'}{dy}\right)+\left(\frac{dv''}{dz}\right)=0,$$

peut se réduire à cette forme plus simple

$$\left(\frac{du}{ds}\right)=0 \ldots\ldots (a),$$

(1) Voyez deux Mémoires d'*Euler* insérés parmi ceux de l'Académie de Pétersbourg; l'un de 1756, intitulé *Principia motûs fluidorum*; l'autre, de 1770, *De Motu fluidorum lineari*; et la Mécanique philosophique, dont l'auteur, le C.^en^ *Prony*, directeur de l'École des ponts et chaussées, et membre de l'Institut national, a rapproché, avec autant d'ordre que de clarté, toutes les propositions fondamentales de l'hydrodynamique.

dans laquelle u représente la vîtesse d'une molécule parallèlement à l'élément ds de la courbe du tuyau auquel cette molécule correspond pendant l'instant dt.

Considérant encore qu'aux trois termes $\Phi\delta x + \Phi'\delta y + \Phi''\delta z$ de la formule (B), on peut substituer le terme unique $(\Phi)\,\delta s$ qui représente le moment de la force accélératrice (Φ) parallèle à l'élément de la courbe, cette formule devient

$$\delta p = - g\delta z - (\Phi)\delta s \ldots\ldots (b).$$

Or le premier membre de l'équation $\left(\frac{du}{ds}\right) = 0$ étant la différence partielle de u par rapport à s, cette équation est identique avec celle-ci $\delta u = 0$, par laquelle on exprime qu'au même instant toutes les molécules se meuvent avec la même vîtesse : cette vîtesse varie donc, seulement d'un instant à l'autre, de la même quantité dans toute l'étendue du fluide, et l'on a généralement, f et f' étant des signes de *fonctions*, suivant la notation de *Lagrange*,

$$u = f(t), \ \left(\frac{du}{dt}\right) = f'(t) = (\Phi);$$

d'où l'on voit que la force accélératrice (Φ) est aussi seulement fonction du temps, et par conséquent constante au même instant pour toutes les molécules.

Changeant δ en d, et intégrant, d'après cette considération, l'équation (b), elle devient

$$p = g\,(h - z) - (\Phi)s + F(t),$$

valeur, en termes finis, de la pression d'une molécule en un point quelconque du filet fluide, dans un instant déterminé de son mouvement.

Substituons maintenant, par la pensée, à la chaîne pesante NM (*fig. 1.re*) une masse de fluide renfermée dans un tuyau étroit, ayant pour directrice la courbe $AMNC$; conservons l'origine des coordonnées au point C de cette courbe (art. 34), et faisons $PN = z'$, $CN = s'$, $P'M = z$, $CM = s$: il est clair qu'en

nommant P' et P les pressions qui ont lieu aux extrémités N et M du fluide en mouvement, on a ces deux équations :

$$P' = g\,(h - z') - (\Phi)\,s' + F(t),$$
$$P = g\,(h - z) - (\Phi)\,s + F(t).$$

Mais, parce que la surface du fluide est libre à ses extrémités N et M, les pressions P' et P doivent y être nulles, ce qui donne

$$g\,(h - z') - (\Phi)\,s' + F(t) = 0,$$
$$g\,(h - z) - (\Phi)\,s + F(t) = 0,$$

et enfin

$$(\Phi) = g\left(\frac{z - z'}{s - s'}\right) = g\,\frac{\Delta z}{\Delta s},$$

expression de la force accélératrice dont un filet fluide, de longueur constante, est animé dans un tuyau de courbure quelconque ; et comme cette expression est précisément la même que celle de la force accélératrice d'une chaîne pesante sur une courbe matérielle (art. 35), il reste démontré qu'il existe une analogie parfaite entre un filet fluide et une chaîne éminemment flexible, et que la théorie des eaux courantes, déduite de cette analogie, doit conduire aux mêmes résultats que la théorie rigoureuse du mouvement des fluides.

Quoique, en appliquant celle-ci, *Euler* n'ait considéré le mouvement linéaire que dans des tuyaux étroits, il a cependant remarqué que l'on pouvait ramener aux mêmes lois le mouvement des fluides dans des tuyaux d'une certaine amplitude, sans qu'on ait à craindre d'être conduit par le calcul à des conclusions sensiblement différentes des résultats de l'expérience (1). Il est évident, en effet, que les formules précédentes doivent s'appliquer à tous les cas où les vîtesses v, v', v'', et les forces accélératrices Φ, Φ', Φ'', parallèles aux trois axes des coordonnées, peuvent se réduire à la vîtesse u et à la force unique (Φ), parallèles à la directrice du canal. Or cette condition se trouve évidemment remplie toutes les fois que la longueur de ce canal est très-grande par rapport à son diamètre, c'est-à-dire, dans

(1) *De Motu fluidorum lineari*, cap. 1, schol. 2.

la plupart des fleuves et des canaux creusés à la surface de la terre : observation importante, qui fait rentrer, en quelque sorte, dans le domaine des sciences exactes le mouvement des eaux courantes, dont les phénomènes ont paru jusqu'ici se dérober aux calculs auxquels ils ont été soumis.

Il nous reste maintenant à faire voir comment les formules précédentes, déduites des lois générales de l'hydrodynamique, conduisent à déterminer les courbes que nous avons appelées d'*écoulement stable* (art. 55 et suiv.).

La question consiste à trouver, au moyen de ces formules, la courbe que doit affecter le fond d'un canal rectangulaire, pour que la surface supérieure d'une masse fluide qui coule librement dans ce canal, demeure exactement parallèle à son fond pendant la durée de l'écoulement.

Il est clair que, dans cet état de choses, toutes les molécules dont la masse fluide est composée, décrivent des courbes égales et parallèles entre elles ; il suffit donc de déterminer la courbe décrite par une molécule quelconque.

Or, quelles que soient les circonstances de l'écoulement, l'équation de continuité,

$$\left(\frac{dv}{dx}\right) + \left(\frac{dv'}{dy}\right) + \left(\frac{dv''}{dz}\right) = 0,$$

pourra toujours se réduire à celle-ci,

$$\left(\frac{du}{ds}\right) = 0,$$

par laquelle on indique que la vîtesse d'une molécule suivant la courbe dont elle décrit un élément dans un instant quelconque, est indépendante du lieu qu'elle occupe sur cette courbe : par conséquent toutes les molécules contiguës qui se trouvent au même instant sur tous les points consécutifs de cette courbe, se meuvent avec la même vîtesse ; le système qu'elles forment peut donc être considéré comme un filet fluide en mouvement dans un tuyau infiniment étroit.

Si donc on suppose que, dans un instant déterminé, ce filet fluide présente une certaine courbe, il présentera dans l'instant suivant, si l'écoulement n'est pas stable, une courbe différente infiniment voisine de la première; de sorte qu'un filet fluide composé d'un nombre constant de molécules qui se meuvent au même instant avec la même vîtesse suivant une certaine courbe, devra être considéré dans deux instans consécutifs, comme mu dans deux tuyaux d'égale longueur, mais de courbures différentes, n'ayant entre elles aucune relation donnée.

Ainsi, nommant p la pression que souffre une molécule quelconque de fluide dans le premier tuyau, et p' celle que souffre une molécule quelconque dans le tuyau varié, les sommes des pressions des mêmes molécules dans deux instans consécutifs, seront respectivement $\int p\,ds$ et $\int p'\,ds$; la variation de ces pressions totales sera par conséquent

$$\int p\,ds - \int p'\,ds = \delta \int p\,ds.$$

Mais si, dans deux instans consécutifs, les mêmes molécules continuent de se mouvoir sur la même courbe, c'est-à-dire, si leur écoulement est stable, la variation des pressions qu'elles éprouvent d'un instant à l'autre, est évidemment nulle : on a donc

$$\delta \int p\,ds = 0;$$

équation qui, combinée avec celle-ci, $\delta \int ds = 0$, par laquelle on exprime que l'on prend un nombre constant de molécules dans les tuyaux variés, servira à déterminer la courbe cherchée.

Pour y parvenir, rappelons-nous que la variation des pressions qu'éprouvent au même instant deux molécules fluides contiguës en mouvement dans un tuyau infiniment étroit, donnée par la formule générale

$$\delta p = X\delta x + Y\delta y + Z\delta z - (\Phi\delta x + \Phi'\delta y + \Phi''\delta z),$$

devient, lorsque le fluide est seulement animé de la pesanteur,

$$\delta p = - g\delta z - (\Phi)\delta s,$$

laquelle, intégrée convenablement après avoir changé δ en d, donne, pour la pression finie d'une molécule quelconque,

$$p = g(h - z) - (\Phi)s + F(t).$$

On a donc

$$\int p\,ds = \int [g(h-z) - (\varphi)s + F(t)]\,ds = [gh + F(t)]\,s - \frac{(\varphi)s^2}{2} + B - \int g z\,ds;$$

et comme les termes du second membre de cette équation, hors du signe $\int$, restent les mêmes pour toutes les courbes de même longueur, il s'ensuit que la variation $\delta \int p\,ds$ se réduit à celle de l'intégrale définie $\int g z\,ds$; ainsi l'on a, pour déterminer la courbe d'écoulement stable, les deux équations

$$\delta \int g z\,ds = 0,$$
$$\delta \int ds = 0,$$

qui, conformément aux principes connus de la méthode des variations, se réduisent à celle-ci,

$$\delta \int g z\,ds + C\,\delta \int ds = 0;$$

d'où l'on tire, par l'application des règles de ce calcul, dans la supposition de dz constant et de $ds = \sqrt{(dx^2 + dz^2)}$

$$- d.\left(\frac{g z\,dx}{\sqrt{(dx^2 + dz^2)}}\right) - C d.\left(\frac{dx}{\sqrt{(dx^2 + dz^2)}}\right) = 0,$$

dont l'intégrale

$$\frac{C\,dx}{\sqrt{(dx^2 + dz^2)}} + \frac{g z\,dx}{\sqrt{(dx^2 + dz^2)}} = \pm D$$

donne enfin, en supposant $\frac{C}{g} = A$ et $\frac{D}{g} = B$,

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\sqrt{[(A + z)^2 - B^2]}}{\pm B},$$

équation différentielle de la chaînette, précisément la même que celle à laquelle nous sommes parvenus (art. 65 et 84) : ainsi la propriété de cette courbe d'être celle d'*écoulement stable*, se conclut immédiatement des lois générales de l'hydrodynamique, comme nous l'avons déduite de la nouvelle théorie développée dans cet Essai.

FIN.

TABLE DES MATIÈRES.

FIN DE LA TABLE.

ERRATA.

PAGE 1, ligne 13, *le régime au fleuve*, lisez *le régime du fleuve.*

Page 10, ligne 20, *sont, comme on sait*, ajouter *dans le cas dont il s'agit.*

Page 26, ligne 10, *doit avoir pour axe*, lisez *pour directrice.*

Page 35, ligne 1, *perpendiculaire*, lisez *parallèle à.*

Page 39, ligne 6, $u = \frac{\sqrt{(ga)}}{Rs}$, lisez $u = \frac{\sqrt{(ga)}}{\sqrt{(Rs)}}$.

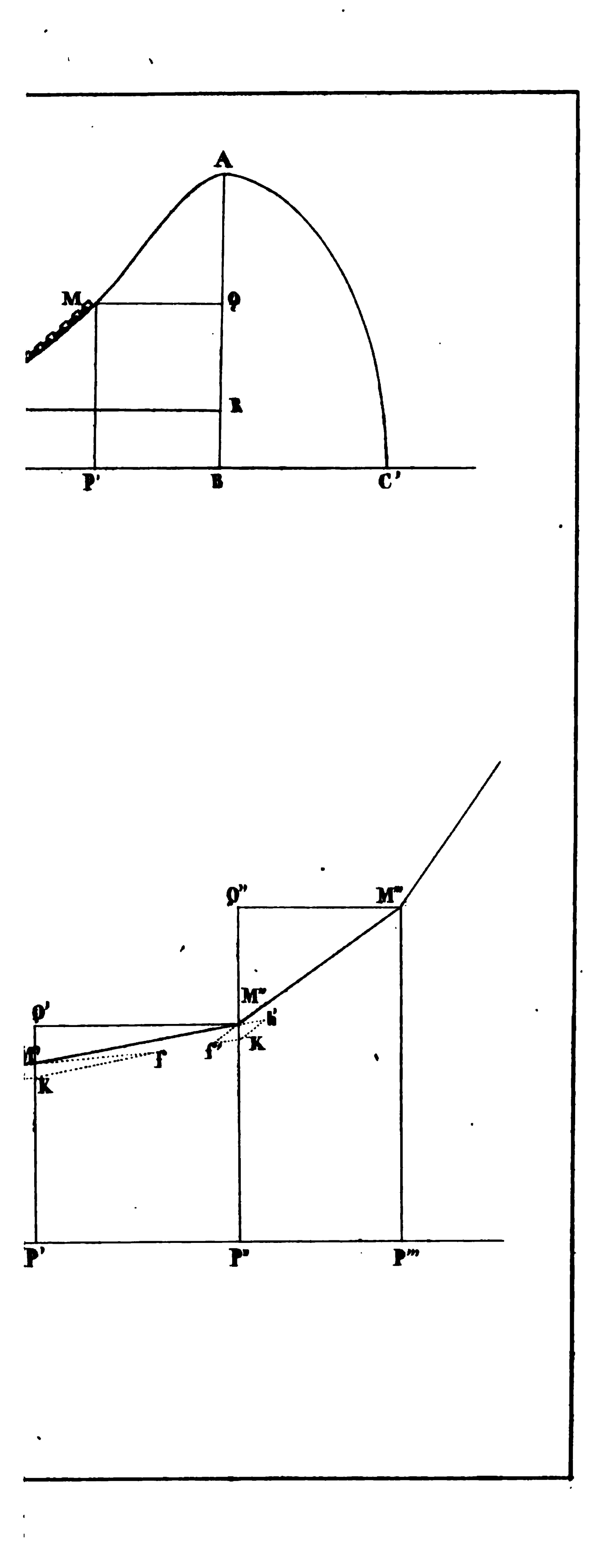
En réduisant en mesures nouvelles les résultats numériques des expériences qui forment la première et la seconde série de celles du C.en *Bossut*, il s'est glissé une erreur de calcul qu'il est essentiel de corriger.

Chacune des valeurs de u^2, comprise dans la 5.e colonne du tableau n.° II, *page 46*, doit être divisée par 1.587 pour avoir la véritable expression du carré de la vîtesse.

Par la substitution de ces nouvelles valeurs à celles qui ont servi à déterminer le coëfficient *R*, dans ces deux premières séries, colonne 2.e, *page 47*, on trouve, pour la réduite de ce coëfficient, 0.35 environ, au lieu de 0.22.

IMPRIMÉ

Par les soins de J. J. MARCEL, Directeur de l'Imprimerie de la République.


A
M
Q
R
P'
B
C'
Q''
M'''
M''
Q'
K
f
f''
K
P'
P''
P'''

EXPÉRIENCES

SUR

LES ROUES HYDRAULIQUES

A AXE VERTICAL,

ET SUR

L'ÉCOULEMENT DE L'EAU DANS LES COURSIERS

ET DANS LES BUSES DE FORME PYRAMIDALE.

PARIS. — IMPRIMERIE DE COSSE ET G.-LAGUIONIE,
RUE CHRISTINE, 2.

3

EXPÉRIENCES

SUR LES

ROUES HYDRAULIQUES

A AXE VERTICAL,

ET SUR

L'ÉCOULEMENT DE L'EAU DANS LES COURSIERS

ET DANS LES BUSES DE FORME PYRAMIDALE.

PAR

Guillaume

G. PIOBERT ET A. L. TARDY,

Officiers d'artillerie, anciens élèves de l'École Polytechnique.

PARIS,

LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE-INDUSTRIELLE DE L. MATHIAS (AUGUSTIN).

QUAI MALAQUAIS, N° 15.

1840.

AVANT-PROPOS.

Les expériences rapportées dans le présent ouvrage offrent un des premiers exemples de l'emploi du frein à la mesure de l'effet utile transmis par les machines; l'appareil dont on a fait usage avait été construit vers la fin de 1821 et différait sensiblement du frein à levier, dont M. de Prony s'est servi le premier, pour évaluer le travail dynamique des moteurs, et dont les auteurs n'avaient pas alors connaissance. Ces expériences exécutées à Toulouse dès le commencement de l'année suivante, furent communiquées peu de temps après à cet illustre savant, que la science vient de perdre, et qui avait donné son approbation à ce travail. On le publie aujourd'hui, quoique primitivement il n'eût pas été destiné à l'impression, parce que MM. Poncelet et D'Aubuisson, qui ont cité dans leurs savants ouvrages (1) quelques-unes de ces expériences, ont pensé que la publication de l'ensemble du travail pourrait être utile, à cause de la construction du frein dont quelques dispositions présentent des avantages, et parce que les deux espèces de roues hydrauliques dont on a mesuré les effets dynamiques, sont peu connues et n'ont pas encore été étudiées.

---

(1) *Cours de Mécanique appliquée aux machines*. Metz, 1834 et 1835, 7e section, p. 39. *Traité d'Hydraulique*, à l'usage des ingénieurs. Paris, 1834, pag. 315.

Ces ouvrages se trouvent à la librairie de L. Mathias, quai Malaquais, 15.

EXPÉRIENCES

SUR LES

ROUES HYDRAULIQUES

A AXE VERTICAL,

ET SUR

L'ÉCOULEMENT DE L'EAU DANS LES COURSIERS

ET DANS LES BUSES DE FORME PYRAMIDALE.

1. L'emploi des roues hydrauliques à axe vertical présenterait souvent de grands avantages sous le rapport de la simplification qu'elles peuvent apporter dans le mécanisme des usines, du peu d'espace qu'elles exigent, de la faculté qu'elles ont de fonctionner malgré la glace et les inondations, de la facilité de leur construction et de l'économie de leur entretien. Dans les moulins à blé, elles dispensent de toute espèce d'engrenage, et permettent de placer plusieurs meules dans les endroits les plus resserrés ; dans les places de guerre, elles peuvent travailler en tout temps, ne gènent en rien la défense, et sont mises à peu de frais à l'abri du feu de l'assiégeant. Malgré ces avantages, les roues horizontales sont peu employées, même dans les localités pour lesquelles elles seraient beaucoup plus convenables

que les autres, parce qu'on leur reproche de ne transmettre qu'une faible portion de l'effort du moteur. Ces roues hydrauliques ayant été peu étudiées dans la pratique et le rapport des effets qu'elles produisent aux effets dépensés n'étant pas connus, il nous a paru intéressant de mesurer ces effets pour les deux espèces de roues horizontales qui se trouvent établies à Toulouse. Dans ce but, on a fait varier leur vitesse et les résistances qui s'opposent à leur mouvement, autant que les instruments et les localités le permettaient, afin de vérifier si le reproche qu'on leur fait est fondé et jusqu'à quel point il peut balancer leurs avantages. Ces recherches ont conduit naturellement à plusieurs expériences sur l'écoulement de l'eau dans les coursiers et dans les cannelles, ou buses de forme pyramidale, et enfin sur la mouture du blé.

2. Les deux barrages de la Garonne à Toulouse et l'abondance des eaux du canal du Midi, près de son embouchure dans cette rivière, ont permis de disposer de chutes d'eau assez considérables pour faire mouvoir un grand nombre de moulins à blé, au moyen de roues horizontales. Ces roues sont de deux espèces : celles qui sont établies sur la rivière sont dites *à cuve,* comme celles qui existent à Cahors, à Metz, etc.; celles qui sont placées sur le canal, dites *à rouet volant*, ressemblent beaucoup à celles qu'on voit depuis un temps immémorial dans les montagnes du Dauphiné, et sont mises en mouvement par la percussion de l'eau sur des aubes courbes qui remplacent les cuillers que portent les arbres des moulins des Alpes (1).

---

(1) Cette dernière espèce de roues hydrauliques à axe vertical est connue depuis des siècles; on la trouve chez les peuples les moins avancés en industrie. En Afrique il en existe un nombre considérable près des grandes chutes du Rummel, à Constantine; les cuillers sont remplacées par des morceaux de bois grossièrement taillés et assemblés avec l'arbre, comme les rais d'une roue avec le moyeu. Une certaine quantité d'eau est dérivée de la partie supérieure de la rivière et conduite par un canal jusque près du moulin; de là elle est dirigée sur un des côtés de la roue par un coursier incliné à l'horizon de 30° à 40°. Après avoir agi sur cette roue, l'eau est réunie et dirigée sur un autre moulin situé plus

La circonstance favorable qui a réuni dans la même ville les deux espèces de roues hydrauliques horizontales employées communément, a permis de les bien apprécier et d'établir entre elles une comparaison rigoureuse, en mesurant les effets produits et dépensés suivant une même méthode, avec les mêmes instruments employés par les mêmes observateurs.

EXPÉRIENCES SUR L'ÉCOULEMENT DE L'EAU.

3. La première opération à exécuter était la mesure des dépenses d'eau ou du moteur qui faisait mouvoir les différentes roues qu'on devait soumettre à l'expérience.

Dans le moulin du Basacle, l'eau passe directement du lit de la rivière dans le coursier de la roue, au moyen d'une vanne qu'on élève à volonté; dans le moulin de l'Hôpital, elle coule dans un bassin par une première vanne, et entre dans le coursier de la roue par une deuxième vanne; dans le moulin du canal du Languedoc, près du pont des Minimes, l'eau superflue du canal est reçue dans un grand bassin qui n'en est séparé que par une vanne; l'eau est dirigée de ce bassin sur les rouets, au moyen de cannelles dont l'entrée est ouverte et fermée par des vannes particulières.

4. Dans ce moulin du canal (*planche Ire*), la dépense pouvait se dé-

---

bas, ensuite sur un troisième, et ainsi de suite jusqu'au niveau inférieur de la rivière, de manière que la même eau est employée successivement à faire mouvoir différentes roues; les chutes partielles ne dépassent pas 5 à 6 mètres.

Les arbres des roues sont réunis par leur partie supérieure et au moyen d'un assemblage très lâche faisant fonction de genou, à une petite meule qui se meut sur une autre meule inférieure, inclinée à l'horizon de 10° à 15°; de sorte que la meule supérieure tourne dans un plan qui n'est pas perpendiculaire à l'arbre, celui-ci restant constamment vertical. Ces moulins à blé préparent la farine destinée à faire le couscoussou, espèce de grosse semoule qu'on fait cuire à la vapeur, et qui forme la nourriture habituelle des indigènes.

duire de la mesure des sections horizontales du bassin à différentes hauteurs et de l'abaissement du niveau de l'eau pendant l'écoulement. Cette expérience a été répétée sur chacune des deux cannelles séparément et sur toutes deux en même temps ; l'on a obtenu ainsi les résultats consignés dans les tableaux 1, 2 et 3 pour les dépenses d'eau par seconde, suivant les différentes charges. On a rectifié ces dépenses à partir de la troisième minute de l'écoulement, en régularisant les différences d'abaissement trouvées, de manière à leur faire suivre une loi régulière qui a dû être troublée par de très faibles agitations de la surface de l'eau et par la grandeur de l'unité de mesure qui était le millimètre.

La dépense pendant les premiers instants a été calculée au moyen de la formule que M. de Prony a donnée dans son Mémoire sur le jaugeage des eaux courantes. On a déduit de ces résultats le coefficient de la dépense, qui s'est trouvé variable avec la hauteur d'eau au-dessus de l'orifice, de telle manière que la dépense d'eau a été proportionnelle à la puissance 3/4 de la hauteur de la surface au-dessus du milieu de la vanne.

EXPÉRIENCES FAITES AU MOULIN DU CANAL

SUR LES DÉPENSES D'EAU.

EXPÉRIENCES FAITES AU MOULIN DU CANAL SUR LES DÉPENSES D'EAU.

5. L'écoulement avait lieu par la cannelle de la meule n° 1, la moins éloignée du canal.

Cette cannelle avait intérieurement des cadres en fer plat de 0m,04 sur 0m,005 environ; c'est sur le plus petit qu'on a mesuré l'ouverture de 0m,208 de hauteur, sur 0m,193 de largeur.

Le zéro des hauteurs a été pris à 1m,00 au-dessous des bords du bassin, à 3m012 au-dessus du haut de la cannelle et à 3m,220 du bas.

Niveau de l'eau ou commencement de l'expérience au-dessus du { haut de la cannelle, $h'=3^m,802$; bas de la cannelle, $h=4^m,010$

Surface du bassin. . .	m.q. 659,82	m.q. 667,58	m.q. 671,24	m.q. 672,21	m.q. 671,97	m.q. 671,43	m.q. 670,59	m.q. 669,65	m.q. 668,42	m.q. 666,98	m.q. 665,24
Pour les hauteurs. . .	1m,00	0m,90	0m,80	0m,70	0m,60	0m,50	0m,40	0m,30	0m,20	0m,10	»

PREMIER TABLEAU.

Niveau de l'eau dans le bassin.	ABAISSEMENT EN 20″	1′	5′	Surface du bassin aux hauteurs correspondantes.	Dépense d'eau pendant 5 minutes.	Même dépense régularisée par les différences.	Dépense d'eau par seconde.	Coefficient de la dépense.	OBSERVATIONS.
1.	2.	3	4.	5.	6.	7.	8.	9.	
m. 0,790	m. 0,010								Le coefficient moyen de la dépense est 0,864; mais on voit que ce rapport varie avec la hauteur de l'eau au-dessus de la vanne. L'expression qui donnerait exactement la dépense par seconde serait $2,769\ V h^{\frac{1}{2}}$. h étant la hauteur de l'eau au-dessus du milieu de l'ouverture de la vanne, et V la surface de cette ouverture. La formule de Prony $q = \frac{1}{\tau}\,(3\xi - \tfrac{1}{2}\xi_{,} + \tfrac{1}{3}\xi_{,,})\,S,$ dans laquelle q est la dépense de l'eau pendant l'unité de temps, S la superficie du bassin,
0,780	0,008	m. 0,028	»	»	»	»	»	»	
0,772	0,010								
0,762	0,010								
0,752	0,007	0,026	»	»	»	»	»	»	
0,745	0,009								
0,736	0,010								
0,726	0,008	0,0?6	m. 0,135 ×	m.q. 672,0 =	m.c. 90,72	m.c. 90,64	m.c. 0,3021	0,8674	
0,718	0,008								
0,710	0,010								
0,700	0,008	0,027	0,133	672,2	84,50	90,38	0,3013	0,8679	
0,692	0,009								
0,683	0,009								
0,674	0,009	0.028	0,134	672,1	90,06	90,02	0,3001	0,8674	
0,665	0,010								
0,655									

0,646	0,009							
0,640	0,006	0,026	0,135	672,0	90,72	89,83	0,2994	0,8685
0,629	0,011							
0,620	0,009							
0,614	0,006	0,027	0,133	671,9	89,36	89,63	0,2983	0,8698
0,602	0,012							
0,594	0,008							
0,588	0,006	0,027	0,133	671,8	89,35	89,23	0,2974	9,8687
0,575	0,013							
0,567	0,008							
0,560	0,007	0,025	0,133	671,7	89,33	88,78	0,2959	0,8677
0,550	0,010							
0,542	0,008							
0,532	0,010	0,028	0,130	671,6	87,31	88,12	0,2937	0,8645
0,522	0,010							
0,516	0,006							
0,506	0,010	0,026	0,129	671,5	86,42	87,48	0,2916	0,8612
0,496	0,010							
0,490	0,006							
0,480	0,010	0,024	0,130	671,3	87,27	87,10	0,2903	0,8604
0,472	0,008							
0,463	0,009							
0,453	0,010	0,026	0,130	671,1	87,24	86,80	0,2893	0,8608
0,446	0,007							
0,438	0,008							
0,428	0,010	0,026	0,128	670,9	85,88	86,45	0,2888	0,8622
0,420	0,006							
0,410	0,008							
0,402	0,010	0,028	0,130	670,7	87,19	86,10	0,2870	0,8601
0,392	0,008							
0,384	0,008							
0,378	0,006	0,024	0,126	670,5	84,48	85,80	0,2860	0,8602
0,368	0,010							
0,360	0,008							
0,352	0,008	0,026	0,130	670,2	87,13	85,50	0,2850	0,8602
0,342	0,010							
0,335	0,007							
0,326	0,009	0,022	»	»	»	»	»	»
0,320	0,006							
0,310	0,010							
0,300	0,010	0,030	»	»	»	»	»	»
0,290	0,010							

$\xi_{,}$ la hauteur dont l'eau a baissé pendant le 1er espace de temps τ,

$\xi_{,,}$ la hauteur dont l'eau a baissé pendant le temps 2τ,

$\xi_{,,,}$ la hauteur dont l'eau a baissé pendant le temps 3τ,

donne la dépense par seconde $0^{mc},30464$ pour le niveau $0^{m},790$, correspondant au commencement de l'écoulement.

SUITE DES EXPÉRIENCES FAITES AU MOULIN DU CANAL,

SUR LES DÉPENSES D'EAU.

---

6. L'eau du bassin s'écoulait par la cannelle de la meule n° 2, la plus éloignée du canal, ayant une ouverture de $0^m,203$ de hauteur, sur $0^m,18$ de largeur. Elle n'avait pas de cadre en fer comme la précédente; mais on a trouvé dedans quelques brins de bois de la grosseur d'une plume, dirigés dans le sens du cours de l'eau.

Le zéro de hauteur était à $3^m,017$ du haut de la cannelle et à 3^m220 du bas.

Niveau de l'eau au commencement de l'expérience au-dessus { du haut de la cannelle $3^m,447$. / du bas ... *idem* ..... $3^m,650$. }

Le bassin était le même que dans l'expérience précédente.

DEUXIÈME TABLEAU.

Niveau de l'eau dans le bassin.	ABAISSEMENT EN 20''	ABAISSEMENT EN 1'	ABAISSEMENT EN 5'	Surface du bassin aux hauteurs correspondantes.	Dépense d'eau pendant 5 minutes.	Même dépense régularisée par les différences.	Dépense d'eau par seconde.	Coefficient de la dépense.	OBSERVATIONS.
1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	
m. 0,430	m. 0,010								Le coefficient moyen de la dépense est 0,964; mais il varie avec la hauteur de l'eau. La formule qui donnerait exactement la dépense serait $3,16\ V\ h^{\frac{3}{4}}$. h étant la hauteur de l'eau au-dessus du niveau de l'ouverture de la vanne et V la surface de cette ouverture. La formule de Prony donne pour la dépense par seconde $0^{m.c.},3013$, pour la hauteur $0^m,430$ du niveau de l'eau, correspondant au commencement de l'écoulement.
0,420	0,010	m. 0,030	»	»	»	»	»	»	
0,410	0,010								
0,400	0,009								
0,391	0,008	0,024	»	»	»	»	»	»	
0,383	0,007								
0,376	0,008								
0,368	0,009	0,026	m. 0,132 ×	m.q. 670,2 =	m.c. 88,37	m.c 86,21	m.c. 0,2874	0,9515	
0,359	0,009								
0,350	0,010								
0,340	0,009	0,026	0,128	670,0	85,77	86,15	0,2872	0,9514	
0,331	0,007								
0,324									

0,315	0,009							
0,308	0,007	0,026	0,128	669,7	85,72	86,09	0,2870	0,9576
0,298	0,010							
0,290	0,008							
0,281	0,009	0,026	0,129	669,4	86,35	86,04	0,2868	0,9600
0,272	0,009							
0,263	0,009							
0,255	0,008	0,024	0,129	669,1	86,30	85,97	0,2866	0,9637
0,248	0,007							
0,238	0,010							
0,229	0,009	0,027	0,128	668,8	85,61	85,72	0,2857	0,9640
0,221	0,008							
0,212	0,009							
0,204	0,008	0,026	0,126	668,5	84,23	85,57	0,2852	0,9660
0,195	0,009							
0,188	0,007							
0,179	0,009	0,025	0,129	668,1	86,18	85,40	0,2846	0,9676
0,170	0,009							
0,162	0,008							
0,154	0,008	0,024	0,128	667,8	85,47	85,11	0,2837	0,9683
0,146	0,008							
0,136	0,010							
0,128	0,008	0,027	0,127	667,4	84,76	84,80	0,2826	0,9684
0,119	0,009							
0,110	0,009							
0,102	0,008	0,026	0,126	667,0	84,04	84,45	0,2815	0,9686
0,093	0,009							
0,086	0,007							
0,077	0,009	0,025	0,126	666,6	84,00	84,16	0,2805	0,9689
0,068	0,009							
0,059	0,009							
0,051	0,008	0,024	0,125	666,2	83,28	84,00	0,2800	0,9711
0,044	0,007							
0,035	0,009							
0,028	0,007	0,024	»	»	»	»	»	»
0,020	0,008							
0,011	0,009							
0,002	0,009	0,026	»	»	»	»	»	»
−0,006	0,008							

SUITE DES EXPÉRIENCES FAITES AU MOULIN DU CANAL
SUR LES DÉPENSES D'EAU.

7. L'écoulement avait lieu pour les deux cannelles en même temps. La hauteur moyenne des ouvertures était de 0m,2048, et la largeur totale de 0m,373.

La hauteur du zéro au-dessus du bas de la cannelle était de. 0m,220

Niveau de l'eau au commencement de l'expérience au-dessus du. . . . . { haut de la cannelle. 3m,8152 / bas . . . idem. . . . 4m,020 }

TROISIÈME TABLEAU.

Niveau de l'eau dans le bassin.	ABAISSEMENT en 20"	4'	5'	Surface du bassin aux hauteurs correspondantes.	Dépense d'eau pendant une minute.	Même dépense régularisée par les différences.	Dépense d'eau par seconde.	Coefficient de la dépense.	OBSERVATIONS.
1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	
m.	m	m.		m q.	m.c.	m.c	m c.		
0,800 0,784 0,760	0,016 0,024 0,017	0,057	»	671,5	38,28	36,60	0,6100	0,9142	Le coefficient moyen de la dépense est 0,895; mais il varie avec la hauteur de l'eau. La formule qui donnerait exactement la dépense serait 2,89 V $h^{\frac{3}{4}}$. La formule de Prony donne pour la dépense par seconde 0m c,6227, pour la hauteur 0m,800 du niveau de l'eau, correspondant au commencement de l'écoulement.
0,743 0,730 0,705	0,013 0,025 0,015	0,053	»	672,1	35,62	36,25	0,6042	0,9119	
0,690 0,675 0,653	0,015 0,022 0,018	0,055	»	672,1	36,97	35,90	0,5983	0,9053	
0,635 0,623 0,610	0,012 0,013 0,025	0,050	»	672,0	33,60	35,55	0,5925	0,9030	
0,585 0,572 0,548	0,013 0,024 0,018	0,055	»	671,8	36,95	35,18	0,5863	0,9004	
0,530 0,515 0,492	0,015 0,023 0,014	0,052	»	671,5	34,92	34,58	0,5763	0,8917	
0,478 0,465 0,442	0,013 0,023 0,012	0,048	»	671,1	32,21	34,09	0,5682	0,8850	
0,430 0,410 0,395	0,020 0,015 0,015	0,050	»	670,6	33,53	34,13	0,5688	0,8928	
0,380 0,361 0,348	0,019 0,013 0,023	0,055	»	670,2	36,86	34,25	0,5708	0,9024	
0,325 0,310 0,296	0,015 0,014 0,021	0,050	»	669,7	33,49	33,76	0,5627	0,8962	
0,275 0,260 0,244	0,015 0,016 0,014	0,045	»	669,1	30,11	32,95	0,5575	0,8940	
0,230 0,210 0,190	0,020 0,020 0,010	0,050	»	668,4	33,42	32,54	0,5423	0,8768	
0,180 0,160 0,145	0,020 0,015 0,017	0,052	»	667,3	34,70	32,30	0,5383	0,8766	
0,128 0,114 0,100	0,014 0,014 0,017	0,045	»	666,1	29,97	32,10	0,5350	0,8806	
0,083 0,065 0,050 0,034	0,018 0,015 0,016	0,049	»	665,6	32,61	31,90	0,5317	0,8820	

8. Le bassin en amont des coursiers du moulin de l'Hôpital (*planche II*) était trop petit, pour que la quantité d'eau contenue pût faire tourner les roues pendant tout le temps nécessaire à chaque expérience, sans qu'il en résultât des abaissements de niveau assez considérables et par suite des dépenses difficiles à évaluer dans les premiers instants. Cette dépense ne pouvant pas être mesurée directement d'une manière exacte, on a employé la méthode donnée par M. de Prony pour déterminer la quantité d'eau qui s'écoule dans un courant dont on peut opérer le barrage; dans ce but on abaissait brusquement la vanne d'entrée dans le bassin, et on mesurait les abaissements successifs du niveau de seconde en seconde, pour en déduire la dépense d'eau au moyen de la formule citée ci-dessus (5).

La vanne d'entrée ne fermant pas hermétiquement le bassin, on a tenu compte de la quantité d'eau qui y entrait pendant l'expérience et qui variait avec la différence de niveau en amont et en aval de l'empellement; à cet effet, on a mesuré les pertes qui avaient lieu par les joints de cette vanne, et on en a dressé le 4[e] tableau, pour servir à corriger les abaissements observés dans les expériences sur les dépenses d'eau.

EXPÉRIENCES FAITES AU MOULIN DE L'HOPITAL,

POUR CONNAITRE LES PERTES D'EAU PAR L'EMPELLEMENT MAITRE.

9. Le zéro des hauteurs a été pris au bas de l'ouverture des vannes du coursier.

La surface du bassin était de 4^{mq},516.

Le bassin étant vide, on fermait toutes les vannes ; les pertes par l'empellement maître faisaient monter l'eau dans le bassin, ainsi qu'il est indiqué dans la 4e colonne du Tableau suivant.

QUATRIÈME TABLEAU.

Niveau de l'eau en amont de l'empellement.	Niveau de l'eau en aval de l'empellement.	Différence de niveau entre l'eau du bassin et l'eau extérieure.	Élévation de l'eau en deux secondes.	Élévations régularisées.	Élévation par seconde, ou perte par l'empellement.	*OBSERVATIONS.*
1	2	3	4	5	6	
m.	m.	m.	m.	m.	m.	
2,36	1,900	0,460	0,020	0,021	0,010	Les élévations du niveau du bassin par seconde, qui sont les pertes de l'empellement maître, indiquées dans la 6e colonne de ce Tableau, doivent être ajoutées aux abaissements des 5es colonnes dans les Tableaux 5, 6, 7 et 8, des expériences sur les dépenses d'eau, pour former les 6es colonnes, en prenant les pertes qui correspondent aux différences de niveau en amont et en aval de l'empellement indiqués dans les 4es colonnes.
2,36	1,920	0,440	0,025	0,020	0,010	
2,36	1,945	0,415	0,018	0,019	0,009	
2,36	1,963	0,397	0,020	0,019	0,009	
2,36	1,983	0,377	0,017	0,018	0,009	
2,36	2,000	0,360	0,018	0,018	0,009	
2,36	2,018	0,342	0,017	0,017	0,008	
2,36	2,035	0,325	0,015	0,017	0,008	
2,36	2,050	0,310	0,020	0,017	0,008	
2,36	2,070	0,290	0,017	0,016	0,008	
2,36	2,087	0,273	0,018	0,016	0,008	
2,36	2,105	0,225	0,012	0,016	0,008	
2,36	2,117	0,243	0,016	0,015	0,008	
2,36	2,133	0,227	0,014	0 015	0,007	
2,36	2,147	0,213	0,015	0,014	0,007	
2,36	2,162	0,198	0,012	0,013	0,007	
2,36	2,174	0,186	0,013	0,013	0,006	
2,36	2,187	0,173	0,012	0,012	0,006	
2,36	2,199	0,161	0,013	0,012	0,006	
2,36	2,212	0,148	0,012	0,011	0,006	
2,36	2,224	0,136	0,011	0,011	0,005	
2,36	2,235	0,125	0,010	0,010	0,005	
2,36	2,245	0,115	0,009	0,010	0,005	
2,36	2,254	0,106	0,009	0,C09	0,005	
2,36	2,263	0,097				

10. Les expériences sur les dépenses d'eau ont été faites pour quatre levées et répétées deux et trois fois pour chaque levée : les tableaux 5, 6,

7 et 8 contiennent les résultats obtenus. Le coefficient de la dépense a été calculé pour chaque levée de vanne et pour différentes hauteurs d'eau.

EXPÉRIENCES FAITES AU MOULIN DE L'HOPITAL SUR LES DÉPENSES D'EAU.

11. Dans ces expériences et les suivantes, le bassin avait toutes ses vannes levées; on abaissait tout à coup l'empellement maître, et l'eau s'écoulait par la vanne du coursier.

La largeur de la vanne était de 0m,67, et la surface du bassin de 4m,516.
La levée moyenne de vanne était de 0m,0825 = l.

CINQUIÈME TABLEAU.

HAUTEUR D'EAU dans le bassin pour les expériences. 1	2	Abaissement moyen par seconde.	Différence de niveau en amont et en aval de l'empellement	Abaissement régularisé.	Abaissement corrigé de la perte par l'empellement	Dépense d'eau par seconde.	Coefficient de la dépense.	OBSERVATIONS.
1	2	3	4	5	6	7	8	
m. 2,51	m. 2,50		m. 0,13					
2,47	2,44	m. 0,05	0,17	m. 0,053	m. 0,059	m.c 0,2664	0,072	Derrière la vanne l'eau s'élevait à 0m,19 et au plus grand remou à 0m,30, pour la hauteur d'eau de 2m,40 à 2m,50 dans le bassin; elle s'élevait à 0m,14 et à 0m,20, pour la hauteur d'eau de 2m,20 à 2m,30.
2,42	2,39	0,05	0,22	0,052	0,058			
2,39	2,33	0,045	0,25	0,052	0,059			
2,32	2 26	0,07	0,32	0,051	0,059			
2,27	2,21	0,05	0,37	0,050	0,058	0,2619	0,735	
2,21	2,16	0,055	0,43	0,050	0,059			
2,17	2,11	0,045	0,47	0,049	0,059			
2,13	2,07	0,04	0,51	0,048	0,059			
2,07	2,03	0,05	0,57	0,048				
2,03	1,98	0,045	0,61	0,047				
1,98	1,93	0,05	0,66	0,046				
1,94	1,89	0,04	0,70	0,045				
1,90	1,85	0,04	0,74	0,044				
1,86	1,80	0,045	0,78	0,043				
1,82	1,75	0,045	0,82	0,042				
1,79	1,72	0,03	0,85	0,041				
1,74	1,67	0,05	0,90	0,039				
1,70	1,63	0,04	0,94	0,038				
1,66	1,60	0,035	0,98	0,036				
1,63	1,56	0,035	1,01	0,034				
1,60	»	0,03	1,04	0,032				
1,57	»	0,03	1,07	0,030				

SUITE DES EXPÉRIENCES FAITES AU MOULIN DE L'HOPITAL

SUR LES DÉPENSES D'EAU.

12. La levée moyenne de vanne était de 0^m,1675 = l et la largeur de la vanne de 0^m,67 = l'.

SIXIÈME TABLEAU.

Hauteur d'eau dans le bassin pour les expériences. 3	4	Abaissement moyen par seconde.	Différence de niveau en amont et en aval de l'empellement.	Abaissement régularisé.	Abaissement corrigé de la perte par l'empellement.	Dépense d'eau par seconde.	Coefficient de la dépense.	OBSERVATIONS.
1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	
m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.c.		
2,43	»		0,21					
		0,070		0,095	0,103	0,4651	0,665	
2,36	»		0,28					
		0,100		0,092	0,100	0,4516	0,670	
2,26	»		0,38					
		0,080		0,088	0,097	0,4381	0,650	
2,18	2,20		0,45					
		0,100		0,085	0,095	0 4290	0,650	
2,08	2,10		0,55					
		0,100		0,081				
2,00	1,98		0,65					
		0,065		0,078				
1,95	1,90		0,71					
		0,075		0,074				
1,98	1,82		0,79					
		0,060		0,071				
1,82	1,76		0,85					
		0,070		0,066				
1,75	1,69		0,92					
		0,055		0,063				
1,70	1,63		0,97					
		0,060		0,059				
1,64	1,57		1,03					
		0,060		0,055				
1,58	»		1,06					

Derrière la vanne l'eau s'élevait à 0^m,412 et au plus grand remou à 0^m,65, pour la hauteur d'eau de 2^m,40; elle s'élevait à 0^m,365 et à 0^m,57, pour celle de 2^m,15.

SUITE DES EXPÉRIENCES FAITES AU MOULIN DE L'HOPITAL
SUR LES DÉPENSES D'EAU.

13. La levée de vanne était de $0^m,225 = l$ et la largeur de la vanne de $0,^m67 = l'$.

SEPTIÈME TABLEAU.

Hauteur d'eau dans le bassin pour les expériences. 5	6	7	Abaissement moyen par seconde.	Différence de niveau en amont et en aval de l'empellement	Abaissement régularisé.	Abaissement corrigé de la perte par l'empellement	Dépense d'eau par seconde.	Coefficient de la dépense.	OBSERVATIONS.
1.	2.	2 *bis*.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	
m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.c.		
»	2,44	»	0,100	0,20	0,096	0,104	0,4693	0,524	Derrière la vanne l'eau s'élevait à 0^m59 et au plus grand remou à $0^m,97$, pour la hauteur d'eau de $2^m,40$; elle s'élevait à $0^m,56$ et à $0^m,89$, pour la hauteur d'eau de $2^m,20$.
2,34	2,34	»	0,085	0,30	0,093	0,102	0,4606	0,526	
2,27	2,24	2,22	0,087	0,40	0,091	0,101	0,4561	0,532	
2,20	2,14	2,13	0,097	0,48	0,088				
2,10	2,05	2,03	0,080	0,59	0,085				
2,02	1,98	1,94	0,087	0,66	0,082				
1,95	1,89	1,84	0,087	0,75	0,079				
1,86	1,79	1,77	0,070	0,83	0,076				
1,76	1,74	1,71	0,073	0,90	0,073				
1,69	1,67	1,63	0,067	0,98	0,070				
1,62	1,62	1,55		1,04					

SUITE DES EXPERIENCES FAITES AU MOULIN DE L'HOPITAL
SUR LES DÉPENSES D'EAU.

14. La levée de vanne était de $0^m,285 = l$ et la largeur de la vanne de $0^m,67 = l'$.

HUITIÈME TABLEAU.

Hauteur d'eau dans le bassin pour les expériences. 8	9	Abaissement moyen par seconde.	Différence de niveau en amont et en aval de l'empellement	Abaissement régularisé.	Abaissement corrigé de la perte par l'empellement.	Dépense d'eau par seconde.	Coefficient de la dépense.	OBSERVATIONS.
1.	2.	3	4.	5.	6.	7.	8.	
m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.c.		
2,24	2,29	0,075	0,37	0,110	0,119	0,5374	0,520	Derrière la vanne l'eau s'élevait à $0^m,74$ et au plus grand remou à $1^m,20$, pour la hauteur d'eau de $2^m,20$.
2,18	2,20	0,135	0,45	0,107	0,117	0,5284	0,529	
2,03	1,08	0,105	0,59	0,104				
1,92	1,98	0,105	0,69	0,100				
1,81	1,88	0,110	0,80	0,095				
1,74	1,73	0,075	0,91	0,090				
1,64	1,68	0,085	0,98	0,084				
1,57	1,58		1,07					

15. Dans le moulin du Basacle (*planche III*), l'étendue de la rivière et la masse d'eau ne nous ont pas permis d'exécuter des barrages avec les faibles moyens qui étaient à notre disposition. La dépense d'eau ne pouvant être mesurée directement, ni évaluée par la méthode de M. de Prony, on l'a calculée dans la supposition d'un coefficient de la dépense égal à 0,66, moyenne trouvée pour les levées de $0^m,165$ à 0^m170 des vannages du moulin de l'Hôpital, dont les coursiers sont disposés d'une manière à peu près semblable.

MESURE DE L'EFFET MECANIQUE DES ROUES.

16. Pour évaluer l'effet mécanique des roues dans les diverses circonstances qui résultent de la quantité variable d'eau qu'on leur donne et des différentes vitesses qu'elles prennent, on a remplacé la résistance qu'elles avaient habituellement à vaincre, par le frottement de leur arbre contre une enveloppe dont la tendance au mouvement était détruite par une force qu'on mettait en équilibre avec elle, et qui était précisément égale à l'effort vaincu par la roue. L'augmentation ou la diminution de la pression de l'enveloppe contre l'arbre faisait varier le frottement, et par suite la vitesse de rotation de la roue et la tendance au mouvement; la mesure de ces deux quantités dans chaque cas conduisait à l'évaluation de l'effet de la roue dans toutes les circonstances où l'on peut la faire agir. La force F qui sollicite l'enveloppe DE (*planche Ire, fig.* 1) à se mouvoir, est égale à la résistance vaincue par la partie frottante ab de la roue; cette partie parcourt à chaque révolution un espace égal à 2π fois sa distance ρ à l'axe de rotation C; l'effet dynamique pour chaque révolution est donc $2\pi F\rho$, ou $2\pi F n\rho$ pendant l'unité de temps; n étant le nombre de tours faits par la roue dans le même temps. Si T est la tension d'un cordon qui empêche l'enveloppe d'être entraînée par son frottement sur la roue, et r la longueur de la perpendiculaire abaissée du centre de rotation C sur sa direction Tt, on aura :

$$F\rho = Tr,$$

puisque la résistance T fait équilibre à l'effort F, leurs moments doivent être égaux ; il en résulte que l'effet dynamique $2\pi n F\rho$ devient $2\pi n T r$, expression indépendante de la nature du frottement des surfaces et de leurs positions relativement à l'axe ; elle ne se trouve plus composée que des quantités n, T et r, qu'on peut mesurer directement dans chaque expérience. Mais comme dans la pratique, la mesure de ces trois quantités doit être prise au même instant, et que l'opération dure nécessairement un certain temps, même en supposant plusieurs observateurs, il est nécessaire, pour faire cette opération d'une manière exacte et facile, que l'effort T et la vitesse de rotation soient constants pendant tout le temps de l'observation ; pour cela il faut rendre le frottement régulier et uniforme.

17. Nous sommes parvenus à obtenir ce résultat pour les roues horizontales de Toulouse, en rendant les arbres A (*planche I, fig.* 2) cylindriques sur une longueur de 2 pieds environ et en leur donnant un diamètre d'environ $0^m,379$; l'enveloppe ou surface frottante était composée de 8 morceaux de chêne B, semblables aux douves d'un cuvier et entaillées intérieurement suivant une surface cylindrique de même diamètre que celle de l'arbre. Ces douves étaient fixées sur un fort cordage D qui les entourait deux fois et les pressait contre l'arbre A, au moyen de deux leviers C dont les extrémités étaient rapprochées l'une de l'autre, par une corde E, plus ou moins suivant qu'on voulait faire varier la pression et par suite le frottement. Une corde T arrêtait le mouvement de l'enveloppe, et sa tension mesurée par un dynamomètre, indiquait la tendance du système à suivre l'arbre dans sa rotation. Un observateur comptait le nombre n des révolutions de cet arbre en 10 et 20 secondes; un deuxième notait la tension T du dynamomètre pendant tout ce temps, et mesurait la distance r à laquelle la direction de T passait de l'axe de rotation. On avait ainsi la valeur de toutes les quantités qui entrent dans l'expression $2\pi n T r$ de l'effet dynamique de chaque roue.

18. Lorsque l'arbre A (*planche I, fig.* 3) n'avait pas un diamètre assez fort, ou que quelques circonstances empêchaient de le tourner, on l'entourait d'un manchon en bois G, exactement cylindrique et composé de deux

pièces assemblées au moyen de goujons et de deux frettes F serrées par des clavettes ; huit coins H servaient à fixer le manchon et à le centrer sur l'arbre A.

19. Ces appareils ont été adaptés aux arbres des différentes roues mises en expérience et ont servi à déterminer leur effet utile.

Les résultats des expériences sur les effets dépensés et sur les effets produits par les diverses roues horizontales, sont consignés dans les tableaux 9, 10, 11 et 12.

Les roues des meules n° 3 et n° 4 du moulin du Basacle ont été soumises aux expériences, et les résultats obtenus sont inscrits dans les tableaux suivants.

EXPÉRIENCES FAITES AU MOULIN DU BASACLE,

SUR LES EFFETS PRODUITS PAR LES ROUES. (4ᵉ MEULE.)

20. La largeur de la vanne était de $0^{m},95 = l'$ et la hauteur du bas du rouet au-dessous du zéro, de $2^{m},47$.

Le zéro a été pris à la hauteur des bords du puits.

Effet dépensé, $E = 0,66,\ l.\ l'\ \sqrt{2gh}\ H.$

Effet produit, $e = 2\pi rn\ T.$

NEUVIÈME TABLEAU.

Numéros des expériences.	Hauteur de l'eau en amont de la vanne.	Hauteur de l'eau en aval de la vanne.	Levée de la vanne.	Différence entre les niveaux en amont et en aval de la vanne.	Chute totale de l'eau jusqu'au bas du rouet.	Effet dépensé.	Nombre de tours du rouet par seconde.	Distance de l'axe du rouet à la direction de l'effort du dynamomètre.	Tension du dynamomètre.	Effet produit.	Rapport entre l'effet produit et l'effet dépensé.	Rapport déduit de la formule pratique.	OBSERVAT.
	1	2	3 l	4 h	5 H	6 E	7 n	8 r	9 T	10 e	11 R	12 R'	
	m.	m.	m.	m.	m.	k m.		m.	kil.	k.m			
1	0,09	1,82	0,140	1,73	2,38	1218	1,20	0,85	28,5	182,7	0,150	0,149	
2	0,09	1,41	0,187	1,32	2,38	1422	1,23	0,86	25,0	166,2	0,117	0,144	
3	0,09	1,03	0,485	0,94	2,38	3112	2,00	0,86	13,5	145,9	0,047	0,052	
4	0,09	0,89	0,636	0,80	2,38	3754	2,10	0,835	24,2	267,1	0,071	0,050	
5	0,09	0,89	0,636	0,80	2,38	3754	1,90	0,77	32,0	294,0	0,079	0,064	
6	0,09	1,82	0,140	1,73	2,38	1218	1,17	0,67	39,7	195,8	0,160	0,153	
7	0,08	1,81	0,145	1,73	2,39	1268	1,25	1,09	21,5	184,1	0,144	0,141	
8	0,08	1,81	0,145	1,73	2,39	1268	0,95	1,09	34,3	223,2	0,176	0,170	
9	0,08	1,82	0,145	1,74	2,39	1275	1,47	1,06	13,0	127,3	0,100	0,094	
10	0,09	1,45	0,177	1,36	2,38	1362	1,33	1,06	16,0	142,0	0 105	0,127	
11	0,09	1,45	0,177	1,36	2,38	1362	1,50	1,01	9,3	88,5	0,065	0,099	
12	0,09	1,44	0,177	1,35	2,38	1358	1,10	1,17	21,0	169,8	0,123	0,150	
13	0,09	1,44	0,177	1,35	2,38	1358	0,90	1,14	24,0	159,9	0,118	0 154	
14	0,09	1,04	0,470	0,95	2,38	3032	1,67	1,12	20,5	240,9	0,079	0,080	
15	0,09	1,05	0,470	0,96	2,38	3046	2,00	1,15	9,0	130,0	0,043	0,052	
16	0,09	1,04	0,470	0,95	2,38	3032	1,70	1,15	18,5	225,2	0,074	0,078	
17	0,09	1,03	0,470	0,94	2,38	3018	1,30	1,22	30,5	304,0	0,101	0,094	
18	0,09	1,03	0,470	0,94	2,38	3018	1,20	1,19	34,0	305,1	0,101	0,095	
19	0,09	1,04	0,470	0,95	2,38	3032	1,93	1,19	11,5	166,0	0,055	0,059	
20	0,11	0,76	0,825	0,65	2,36	4366	2,10	1,17	12,5	193,0	0,044	0,051	
21	0,11	0,76	0,825	0,65	2,36	4366	1,97	1,19	19,5	287,2	0,066	0,058	
22	0,11	0,75	0,825	0,64	2,36	4342	1,73	1,20	26,5	345,7	0,080	0,077	

4

SUITE DES EXPÉRIENCES FAITES AU MOULIN DU BASACLE,

SUR LES EFFETS PRODUITS PAR LES ROUES. (3e MEULE.)

21. La largeur de la vanne était de $0^m,95 = l'$ et la hauteur du bas du rouet au-dessous de zéro, de $2^m,41$.

Le zéro était à la hauteur des bords du puits.

L'effet dépensé, $E = 0,66\ l.\ l'\ \sqrt{2gh}\ H$,

L'effet produit, $e = 2\pi rn\ T$.

DIXIÈME TABLEAU.

Numéros des expériences.	Hauteur de l'eau en amont de la vanne.	Hauteur de l'eau en aval de la vanne.	Levée de la vanne.	Différence entre les niveaux en amont et en aval de la vanne.	Chute totale de l'eau jusqu'au bas du rouet.	Effet dépensé.	Nombre de tours du rouet par seconde.	Distance de l'axe du rouet à la direction de l'effort du dynamomètre.	Tension du dynamomètre.	Effet produit.	Rapport entre l'effet produit et l'effet dépensé.	Rapport déduit de la formule pratique.	OBSERVAT.
	1.	2.	3. l	4. h	5. H	6. K	7. n	8. r	9. T	10. e	11. R	12. R'	
	m.	m.	m.	m.	m.	k.m.		m.	kil.	k.m.			
1	0,06	1,48	0,17	1,37	2,35	1301	1,25	1,13	23,5	208,6	0,160	0,175	
2	0,06	1,42	0,17	1,36	2,35	1297	1,10	1,09	32,0	241,1	0,185	0,183	
3	0,06	1,44	0,17	1,38	2,35	1305	1,44	1,09	16,0	157,8	0,121	0,155	
4	0,06	1,44	0,17	1,38	2,35	1305	1,60	1,18	9,5	112,7	0,086	0,128	
5	0,06	1,44	0,17	1,38	2,35	1305	1,65	1,19	7,5	925,0	0,071	0,115	
6	0,06	1,00	0,51	0,94	2,35	3232	2,50	1,19	8,5	158,9	0,049	0,028	
7	0,06	0,99	0,51	0,93	2,35	3214	2,27	1,18	13,5	227,2	0,071	0,055	
8	0,06	0,99	0,51	0,93	2,35	3214	2,25	1,14	16,5	266,0	0,083	0,058	
9	0,06	0,98	0,51	0,92	2,35	3197	2,00	1,10	24,0	331,8	0,103	0,081	
10	0,06	0,97	0,51	0,91	2,35	3179	1,50	1,07	35,0	352,9	0.110	0,104	
11	0,06	0,76	0,80	0,70	2,35	4360	2,50	1,06	14,5	227,7	0,052	0,048	
12	0,06	0,75	0,80	0,69	2,35	4330	2,10	0,99	26,5	346,1	0,079	0,072	
13	0,06	0,75	0,80	0,69	2,35	4330	2,00	1,15	30,0	433,5	0,099	0,076	

22. Ces tableaux relatifs aux rouets à cuve du moulin du Basacle, renferment douze colonnes.

La colonne 1 indique la hauteur du niveau de l'eau en amont de la vanne, au-dessous d'un plan horizontal à partir duquel on a pris toutes les hauteurs de haut en bas.

La colonne 2 donne la hauteur de l'eau en aval de la vanne.

La colonne 3 indique les levées de vannes pour chaque expérience.

La colonne 4 donne les différences des niveaux en amont et en aval de la vanne, qui sont indiqués dans les colonnes 1 et 2.

La colonne 5 donne la chute totale depuis le niveau supérieur jusqu'au bas du rouet.

La colonne 6 donne l'effet dépensé calculé dans la supposition que le coefficient de la dépense est 0,66, moyenne trouvée dans les expériences faites au moulin de l'Hôpital pour les levées moyennes; le coefficient 0,780 n'a été adopté que pour la grande levée $0^m,80$, cas pour lequel il a été trouvé. On a pris pour unité dynamique le kilogramme élevé à un mètre de hauteur.

Dans la colonne 7, on trouve le nombre de tours faits par le rouet pendant une seconde, moyenne prise sur le résultat obtenu en comptant pendant 20 ou 30 secondes.

La colonne 8 donne la distance de l'axe du rouet à la direction de l'effort que le dynamomètre exerce et qui empêche le mouvement de l'enveloppe de l'arbre.

Dans la colonne 9, on trouve la moyenne des tensions du dynamomètre pendant la durée de chaque expérience.

La colonne 10 indique les effets produits, calculés par la formule de la page précédente et ramenés à l'unité dynamique adoptée ci-dessus.

La colonne 11 donne le rapport de l'effet produit à l'effet dépensé, ou des quantités portées dans les colonnes 10 et 6.

La colonne 12 donne le même rapport déduit de la formule pratique :

$$n^2 - 2,9\, n \sqrt[4]{l} = -82,5\, l R', \text{ pour le rouet n}^o\ 4.$$
$$n^2 - 3.2\, n \sqrt[4]{l} = -34.\, l R', \text{ pour le rouet n}^o\ 3.$$

La première s'accorde assez bien avec les résultats obtenus avec la roue n° 4, excepté pour la levée de vanne de $0^m,177$, qui a donné évidemment des effets trop faibles; il serait difficile de donner la cause de cette anomalie.

23. La roue du moulin de l'Hôpital a donné les résultats indiqués dans le tableau suivant.



EXPERIENCES FAITES AU MOULIN DE L'HOPITAL,

SUR LES EFFETS PRODUITS PAR LES ROUES.

La largeur de la vanne était de $0^{m},67 = l'$ et la hauteur du bas du rouet au-dessous du zéro, de $0^{m},43$.

Les hauteurs ont été prises à partir du plan horizontal passant par le bas de l'ouverture de la vanne.

L'effet dépensé, $E = C\,l\,l'\sqrt{2gh}\ H$.

Le coefficient C a été pris dans les tableaux 5, 6, 7 et 8.

L'effet produit, $e = 2\pi r n\ T$.

ONZIÈME TABLEAU.

Numéros des expériences.	Hauteur de l'eau dans le bassin.	Hauteur de l'eau en aval de la vanne.	Levée de la vanne,	Dépense d'eau.	Chute totale, jusqu'au bas du rouet.	Effet dépensé.	Nombre de tours du rouet par seconde.	Distance de l'axe du rouet, à la direction de l'effort du dynamomètre	Tension du dynamomètre.	Effet produit.	Rapport entre l'effet produit et l'effet dépensé.	Rapport déduit de la formule pratique.	OBSERVAT.
	1.	2.	3. l	4.	5. H	6. E'	7. n	8. e	9. T	10 r	11. R	12. R'	
	m.	m.	m.	m.c	m.	k.m.		m.	kil.	k.m.			
1	2,54	0,190	0,095	0,310	2,99	930	1,78	1,55	8,0	134,3	0,145	»	
2	2,55	0,185	0,095	0,310	2,99	930	1,33	1,53	14,5	185,4	0,199	»	
3	2,55	0,185	0,095	0,310	2,99	930	1,30	1,53	15,5	193,7	0,207	»	
4	2,59	0,185	0,095	0,313	3,02	940	1,10	1,52	17,5	193,9	0,206	»	
5	2,59	0,190	0,095	0,313	3,02	940	1,05	1,53	19,5	196,8	0,210	»	
6	2,51	0,245	0,159	0,475	2.95	1400	2,30	1,53	8,5	188,0	0,134	0,130	
7	2,53	0,245	0,159	0,476	2,95	1400	2,15	1,53	12,5	258,4	0,184	0,175	
8	2,53	0,245	0,159	0,476	2,95	1400	1,90	1,52	17,0	308,5	0,221	0,227	
9	2,53	0,325	0,159	0,466	2,95	1370	1,95	1,52	16,0	297,9	0,217	0.217	
10	2,53	0,245	0,159	0,476	2,95	1400	1,90	1,52	17,5	317,5	0,227	0.227	
11	2,53	0,275	0,159	0,474	2,95	1400	2,05	1,53	15,5	305,5	0,218	0,196	
12	2,54	0,275	0.159	0,475	3,96	1400	2,00	1,53	16,5	317,2	0,226	6,207	
13	2,53	0,275	0,159	0,474	2,95	1400	2,00	1,53	16,0	307,6	0,219	0,207	
14	2,54	0,250	0,149	0,452	2,96	1340	2,25	1,54	10,0	217,5	0,162	0,134	
15	2,53	0,250	0,149	0,451	2,96	1340	2,00	1 54	14,5	280,6	0,209	0,207	
16	2,53	0,240	0,149	0,452	2,96	1340	1,85	1.54	17,5	313,3	0,233	0,240	
17	2,53	0,240	0,149	0,452	2,96	1340	1,75	1,53	20,0	336,5	0,252	0,257	
18	2,53	0,240	0,149	0,452	2,96	1340	1,65	1,53	22,5	356.9	0,267	0 269	

La hauteur de l'eau dans le bassin, toutes les vannes étant fermées, variait de $1^{m},09$ à $1^{m}03$ au-dessous de ses bords.

L'arbre a été arrêté par le frottement du frein pendant les expériences n°s 4 et 5; le dynamomètre marquait alors de 38 à 40 kil.

24. Dans ce tableau relatif aux rouets à cuve du moulin de l'Hôpital, les colonnes 1 et 2 indiquent les mêmes quantités que dans les tableaux précédents, mais les hauteurs sont celles du niveau au-dessus du fond du bassin. La colonne 4 donne les dépenses trouvées en prenant les coefficients donnés pour les différentes levées de vannes, par les expériences directes et indiquées dans les tableaux 5, 6, 7 et 8.

Les colonnes 3, 5, 7, 8, 9, 10, 11 représentent des quantités analogues à celles des colonnes correspondantes des tableaux 9 et 10.

La colonne 12 donne le rapport de l'effet produit à l'effet dépensé, déduit de la formule pratique :

$$n^2 - 4{,}2\, n \sqrt[4]{l} = -39\, l\, R',$$

qui s'accorde avec une assez grande partie des résultats obtenus avec les levées de vannes ordinaires de $0^m,159$ et $0^m,149$, mais qui donne des valeurs de R' environ deux fois trop fortes pour la très petite levée de $0^m,095$; cette dernière levée ne s'emploie jamais dans la pratique, parce qu'une partie de l'eau dépensée traverse la roue sans agir sur elle, et que les diverses résistances absorbent une portion notable de l'effet.

25. Cette dernière formule, relative à des roues de même diamètre que les cuves, peut se transformer, devenir identique avec les deux premières (22) et représenter les effets obtenus avec les roues du Basacle, en y faisant entrer l'expression des vides qui existent autour de ces roues (*planche III*, *fig.* 4) et donnent passage à l'eau. Si on représente par D le diamètre de la cuve et par D' celui de la surface intérieure du cylindre enveloppe du rouet, et qu'on multiplie le 2e terme de la formule par $\frac{D'^2}{D^2}$ et le dernier par $\frac{D'}{D}$, on aura la formule générale des roues horizontales à cuve:

$$n^2 - 4.2\, \frac{nD'^2}{D^2} \sqrt[4]{l} = -39\, \frac{D'}{D}\, l\, R' \quad (1).$$

Pour la roue du moulin de l'Hôpital on a $D = 0^m,88$, et $D' = 0^m,88$, d'où

$$\frac{D'^2}{D^2} = 1, \text{ et } \frac{D'}{D} = 1,$$

et par suite :

$$n^2 - 4.2\, n\sqrt[4]{l} = -39\, l\, R'$$

comme ci-dessus. Pour la roue n° 3, du Basacle, $D = 1^m,02$, et $D' = 0^m,89$, d'où :

$$\frac{D'^2}{D^2} = 0{,}76, \text{ et } \frac{D'}{D} = 0{,}87,$$

et par suite :

$$n^2 - 3.2\, n\sqrt[4]{l} = -34\, l\, R'.$$

Pour la roue n° 4 du Basacle, on a $D = 1^m,12$ et $D' = 1^m,00$; mais les ailes de la roue étant en partie brisées, la surface d'action est moindre et égale à celle d'un cercle dont le diamètre ne serait que de $0^m,93$. Faisant $D' = 0^m,93$, on a

$$\frac{D'^2}{D^2} = 0{,}69, \text{ et } \frac{D'}{D} = 0{,}83,$$

et par suite :

$$n^2 - 2{,}9\, n\sqrt[4]{l} = -32.5\, l\, R',$$

formule identique avec celle que nous avons donnée précédemment (22).

26. Cette formule pratique des roues à cuves représente assez bien les résultats obtenus par l'expérience dans le plus grand nombre de cas; mais dans d'autres cas, les différences sont notables, et quoique les observations semblent présenter alors des anomalies évidentes, nous ne présenterons cette formule que comme une première tentative pour établir la loi des variations du rapport de l'effet utile à l'effet dépensé, en fonction de la vitesse de la roue et de la dépense d'eau; d'ailleurs nous pensons qu'une formule pratique peut seule représenter, avec simplicité, des effets aussi compliqués que le sont ceux de l'eau dans les cuves des moulins de Toulouse.

27. En comparant les effets produits par les roues aux effets dépensés, on voit que la vitesse de roue la plus avantageuse, donnée par l'expérience est la même, dans chaque cas, que celle qui est indiquée par la

formule pratique, et qu'on trouve en différentiant la valeur de R' par rapport à n et en l'égalant à zéro ; on a ainsi la relation

$$n = 2.1 \frac{D'^2}{D^2} \sqrt[4]{l},$$

qui donne le nombre de tours par seconde que la roue doit faire suivant la levée de vanne ; on voit que la vitesse de la machine qui donne le meilleur emploi de la force motrice, augmente avec la quantité d'eau affluente ou la dépense.

D'après la formule, les levées de vannes les plus petites seraient les plus avantageuses ; mais on conçoit facilement que dans la pratique il doit exister une limite inférieure, les résistances diverses et les pertes devant absorber entièrement les effets produits avec de petites dépenses ; dans le cas des roues soumises à nos expériences, les levées de vannes qui semblent donner les meilleurs résultats sont celles de $0^m,15$ environ ; l'effet produit peut alors aller jusqu'à 1/4 de l'effet dépensé pour les roues bien construites, comme celles du moulin de l'Hôpital. Ce rapport n'est plus que de 1/6 pour les roues d'un diamètre moindre que celui de la cuve, comme cela a lieu dans le moulin du Basacle.

28. Le rouet n° 1 du moulin du canal a donné les résultats consignés dans le tableau suivant.

EXPÉRIENCES FAITES AU MOULIN DU CANA

SUR LES EFFETS PRODUITS PAR LES ROUES.

La hauteur des bords du bassin au-dessus du milieu de l'ouverture de la cannelle était de 4m12.

La hauteur des mêmes bords au-dessus du bas du rouet était de 4m55.

L'ouverture de la cannelle avait une surface de 0m.q04014.

L'effet dépensé, $E = 0,87 \times 0,04014 \sqrt{2gh}\ H$

L'effet produit, $e = 2\pi rn\ T$.

DOUZIÈME TABLEAU.

Numéros des expériences.	Hauteur de l'eau du bassin au-dessous de ses bords.	Hauteur de l'eau au-dessus du milieu de la cannelle.	Chute totale comptée jusqu'au bas du rouet.	Effet dépensé.	Nombre de tours du rouet par seconde.	Distance de l'axe du rouet à la direction de l'effort du dynamomètre.	Tension du dynamomètre.	Effet produit.	Rapport de l'effet produit à l'effet dépensé.	Vitesse de la roue au point choqué, divisée par celle qui est due à la hauteur de chute.	OBSERVATIONS.
	1.	2. h	3. H	4. E	5. n	6. r	7. t	8. e	9. R	10.	
	m.	m.	m.	k.m.		m	kil	k.m.			
1	0,16	3,96	4,39	1351	1,90	1,14	14,5	213,7	0,158	0,694	L'arbre du rouet éprouvait dans sa crapaudine une résistance de 1 k. 2, mesure prise à 1m 14 de l'axe; la tension t du dynamomètre doit être augmentée en conséquence, pour donner la valeur de T.
2	0,23	3,89	4,32	1318	2,03	1,14	13,5	213,7	0,162	0,748	
3	0,29	3,83	4,26	1290	1,83	1,14	29,5	402,0	0 312	0,680	
4	0,32	3,80	4,23	1275	1,73	1,13	32,0	407,8	0,320	0,645	
5	0,38	3.74	4,17	1248	1,70	1 12	34,0	421,1	0,330	0,639	
6	0,48	3,64	4,07	1201	1,73	1,19	26,0	351,8	0,298	0,659	
7	0,51	3,61	4,04	1187	1,48	1,18	44,0	479,2	0,403	0,547	
8	0,59	3,53	3,96	1151	1,50	1,27	36,5	451,2	0,392	0,580	
9	0,24	3,88	4,31	1318	2,10	1,00	»	137,0	0.012	0,775	Il n'y avait d'autre résistance que le frottement du pivot de l'arbre dans sa crapaudine; sa valeur moyenne était de 1k037 à 1m de l'axe.
10	0,25	3,87	4,30	1308	0	1,33	76,0	»	»	»	Le frottement du frein arrêtait entièrement le rouet.

29. Dans ce tableau relatif aux rouets volants du moulin du Canal, la colonne 2 indique la hauteur de l'eau au-dessus du milieu de l'ouverture inférieure de la cannelle, hauteur à laquelle est due la vitesse de l'eau qui s'échappe. La colonne 4 donne l'effet dépensé calculé avec le coefficient de la dépense 0m,87, trouvé dans les expériences sur l'écoulement de l'eau par la même cannelle et avec la même hauteur de chute; *Voir* le 1er tableau. Les colonnes 1, 3, 5, 6, 7, 8 et 9 sont analogues à celles des tableaux des expériences précédentes. La colonne 10 indique le rapport de la vitesse de la roue au point choqué à celle de l'eau.

30. Les courbes (*planche IV, fig.* 6, 7 et 8) qui correspondent aux ta-

bleaux 9, 10 et 11, et qui ont pour ordonnées les rapports des effets produits aux effets dépensés, et pour abscisses les vitesses des rouets, montrent quelles sont les vitesses les plus avantageuses pour chaque levée de vanne et quelles sont les levées de vanne qui donnent les meilleurs résultats pour l'emploi de la force motrice. La courbe relative au tableau 12 (*planche IV, fig.* 9) est très incomplète, attendu qu'il n'a pas été possible d'obtenir avec le frein, des vitesses assez lentes pour atteindre le point où les rapports des effets produits aux effets dépensés commencent à décroître.

Les courbes relatives aux tableaux des expériences sur les roues à cuve, montrent que, pour l'emploi le plus avantageux de la force motrice, la vitesse du rouet doit augmenter avec la levée de la vanne, et que les levées d'environ $0^m,15$ donnent les meilleurs résultats.

Dans la courbe des rouets volants, on trouve que les effets augmentent relativement aux dépenses, à mesure que la vitesse diminue; du moins tant que la vitesse du point choqué du rouet ne descend pas au-dessous du cinquième de la vitesse due à la hauteur de chute de l'eau,

APPLICATIONS.

31. En appliquant les résultats précédents à la mouture du blé et cherchant les points des courbes correspondant aux levées de vanne et aux vitesses de rouets employés dans les moulins, on voit que l'expérience a conduit les meuniers à prendre toujours la levée de vanne, dont la vitesse la plus avantageuse est précisément celle dont ils se servent, vitesse qui est déterminée par la condition de moudre la plus grande quantité possible de farine, sans l'échauffer. Les différentes espèces de mouture font bien varier un peu cette vitesse ; mais elle se trouve toujours très rapprochée de celle qui donne le maximum du rapport de l'effet produit à l'effet dépensé.

EXPÉRIENCES FAITES AU MOULIN DU BASACLE

SUR LA MOUTURE DU BLÉ.

---

32. La largeur de la vanne était de $0^{m},95$.

TREIZIÈME TABLEAU.

Désignation de la meule.	Hauteur de l'eau en amont de la vanne	Hauteur de l'eau en aval de la vanne.	Levée de la vanne.	Différence des niveaux en amont et en aval de la vanne.	Chute totale de l'eau jusqu'au bas du rouet.	Effet dépensé.	Nombre de tours du rouet par seconde.	Effet produit sur la meule.	Quantité de blé moulu en une seconde.	Effet à produire sur la meule pour moudre un kil. de blé.	Effet dépensé pour moudre un kilog. de blé.	OBSERVATIONS.
1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	
	m	m.	m.	m.	m.	k. m.		k.m	kil.	k.m.	k. m.	
1°	0,12	1,14	0,41	1,02	2,35	2706	1,20	269	0,0244	11025	110900	Blé fin pour minot, meule piquée légèrement deux jours avant.
3°	0,12	1,12	0,43	1,00	2,35	2809	1,30	261	0,0244	10696	115120	Blé gros pour particulier, meule piquée huit jours avant
4°	0,31	1,10	0,452	0,79	2,35	2631	1,02	268	0,0353	7450	74580	Gros blé pour pain de munition, meule piquée une demi-heure avant.

Une meule pour minot étant en repos, il faut un effort de 36 kilogrammes à 1^{m}, 31 de l'axe, pour la mettre en mouvement, et 30 kilog. pour l'y maintenir. Dans le sens opposé, il faut dans les mêmes cas 42 et 36 kilog. à une distance de 1^{m}, 36 de l'axe.



EXPÉRIENCES FAITES AU MOULIN DE L'HOPITAL
SUR LA MOUTURE DU BLÉ.

33. La largeur de la vanne était de 0,^{m}67.

QUATORZIÈME TABLEAU.

Désignation de la meule	Hauteur de l'eau dans le bassin.	Hauteur de l'eau en aval de la vanne.	Levée de la vanne.	Dépense d'eau.	Chute totale jusqu'au bas du rouet.	Effet dépensé.	Nombre de tours du rouet par seconde.	Effet produit sur la meule.	Quantité de farine moulue par seconde.	Effet produit sur la meule pour moudre un kilog. de blé.	Effet dépensé pour moudre un kilog. de blé.	OBSERVATIONS.
1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	
	m.	m.	m.	m.	m	k.m.		k.m.	k.	k.m.	k.m.	
1re	1,90	0,76	0,36	0,595	2,23	1310	1,55	367	0,0173	21214	75720	Gros blé, meule bien lasse, piquée depuis un mois et demi farine fine pour boulanger.
3^e	2,27	0,91	0,36	0 655	2,70	1720	1,65	44	0,0377	11856	45620	Gros blé, meule fraiche, piquée à fond depuis 10 jours, farine assez belle, pour l'hôpital.
2^e	1,85	0,39	0,26	0,455	2,28	1110	1,35	34	0,0270	12852	41110	Blé fin, meule fraiche, piquée à fond depuis 15 jours, farine très fine, presque comme le minot.
2^e	1,85	0,39	0,26	0,455	2,28	1110	1,00	333	0,0147	22653	75510	Même blé, même meule, farine de minot très belle, son gros et large. (On avait donné du grain à la meule).
2^e	1,85	0,39	0,26	0,455	2,28	1110	1,60	300	0,0213	14084	52110	Même blé, même meule, farine un peu grosse, son coupé (On avait ôté du grain à la meule).

EXPERIENCES FAITES AU MOULIN DU CANAL
SUR LA MOUTURE DU BLÉ.

34. Les deux meules ont été mises successivement en mouvement.

QUINZIÈME TABLEAU.

Désignation de la meule.	Hauteur de l'eau du bassin au-dessous de ses bords.	Hauteur de l'eau au-dessous du milieu de la cannelle.	Chute totale comptée jusqu'au bas du rouet.	Effet dépensé.	Nombre de tours du rouet par seconde.	Effet produit sur la meule d'après le tableau 12.	Quantité de blé moulu en une seconde.	Effet produit sur la meule pour moudre un kil. de blé.	Effet dépensé pour moudre un kilog. de blé.	Vitesse de la roue au point choqué, divisée par celle qui est due à la hauteur de chute.	OBSERVATIONS.
	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	
	m.	m.	m.	k.m.		k.m.	k.	k.m.	k.m.		
1re	0,19	3,63	4,36	1337	1,25	555	0,04511	12303	29640	0,170	Le blé à moudre était gros, la farine grosse et le son coupé. La meule avait été piquée depuis peu de temps. La meule supérieure en pierre siliceuse, un peu transparente, était taillée à 8 rayons, avait 0m,15 d'épaisseur, et 1m,80 de diamètre.
2^e	0,19	3,93	4,36	1329	1,20	545	0,02208	24683	60190	0,451	Farine plus belle que la précédente, son plus long; meule piquée depuis un mois et demi.

Il faut un effort de 42 à 45 kil. à 0^m,83 de l'axe, pour faire marcher la meule sur le grain; à 1,20 tours par seconde cela correspond à un effet de 272 k.m.

35. Les tableaux 13, 14 et 15 donnent les résultats obtenus sur la mouture du blé, par les meules des roues hydrauliques dont on avait mesuré les effets dynamiques. Les premières colonnes renferment toutes les données nécessaires pour conclure l'effet dépensé, comme dans les tableaux qui précèdent. La colonne qui suit celle qui indique le nombre de tours que le rouet ou la meule fait par seconde, donne les effets produits sur la meule, calculés d'après les expériences précédentes, en prenant le rapport de l'effet produit à l'effet dépensé, correspondant à la vitesse dont la roue est animée. La colonne suivante indique la quantité de farine moulue, et les deux dernières contiennent les effets produits sur la meule et les effets dépensés pour moudre chaque kilogramme de blé.

CONCLUSIONS.

36. Des expériences qui précèdent, on peut tirer les conclusions suivantes :

1° Dans l'écoulement de l'eau par une vanne de $0^m,67$ de largeur et par un coursier de même largeur à son entrée et de $0^m,164$ à sa sortie, avec une pente de $0^m,47$ sur une longueur de $3^m,10$, le coefficient de la dépense est de 0,720 à 0,735 pour une levée de vanne de $0^m,0825$; de 0,65 à 0,67, pour une levée de $0^m,1675$; de 0,53, pour une levée de $0^m,225$; et de 0,52 à 0,53 pour une levée de $0^m,285$. La hauteur d'eau étant de $2^m,20$ à $2^m,50$, ce coefficient augmente quand la hauteur de chute diminue.

2° Dans l'écoulement de l'eau par une cannelle en tronc de pyramide, à base carrée de $0^m,20$ de côté à l'orifice de sortie et de $0^m,60$ à celui d'entrée, l'axe étant incliné de $0^m,90$ sur 3^m de longueur, le coefficient de la dépense est de 0,864 lorsqu'il existe intérieurement des cadres en fer de $0^m,005$ d'épaisseur, et de 0,965 lorsque l'intérieur n'est pas garni de cadres. Ce coefficient augmente un peu, comme dans les cas précédents, quand la vitesse de l'eau diminue.

3° Dans les roues hydrauliques horizontales à cuve, les effets produits

avec les vitesses ordinaires, varient de 0,15 à 0,27 des effets dépensés, lorsque les rouets sont en très bon état et de même diamètre que les cuves, de 0,10 à 0,19, pour des rouets ordinaires, et ne dépassent pas 0,17, lorsque les rouets sont en mauvais état, comme celui de la meule n° 4 du moulin du Basacle; les effets produits augmentent à mesure que la vitesse de la roue diminue.

4° Dans les roues hydrauliques horizontales, dites à *rouet volant*, les produits augmentent très rapidement à mesure que la vitesse de la roue diminue; pour la vitesse de 1,7 à 1,8 tour par seconde, ils sont de 0,29 à 0,33 des effets dépensés, et s'élèvent beaucoup plus haut pour les vitesses plus petites, car on a obtenu 0,39 et 0,40 pour des vitesses de 1,50 et 1,43 tour par seconde, vitesses les plus petites qu'on ait pu obtenir avec le frein.

5° Avec les grandes meules en silex, la mouture d'un kilogramme de blé exige un effort équivalent à celui qui serait nécessaire pour élever à un mètre de hauteur 10 à 12 mètres cubes d'eau, lorsque les meules sont en bon état.

TABLE DES MATIÈRES.

MESURE DE L'EFFET MÉCANIQUE DES ROUES.

APPLICATIONS.

CONCLUSIONS.

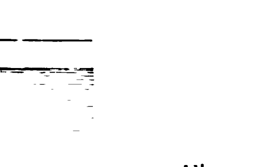


Fig. 1.

C a c c b D E F t T

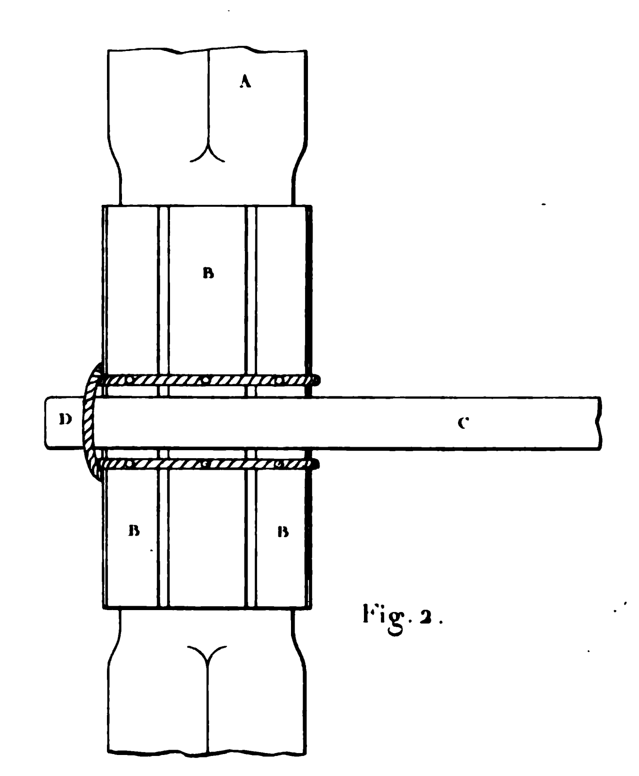
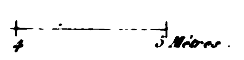
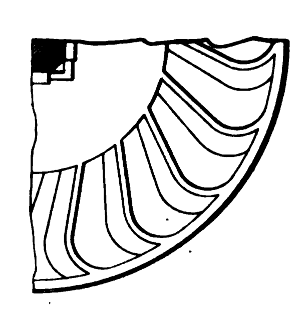
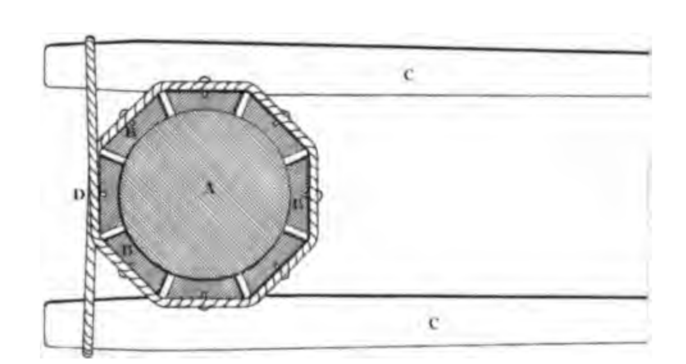


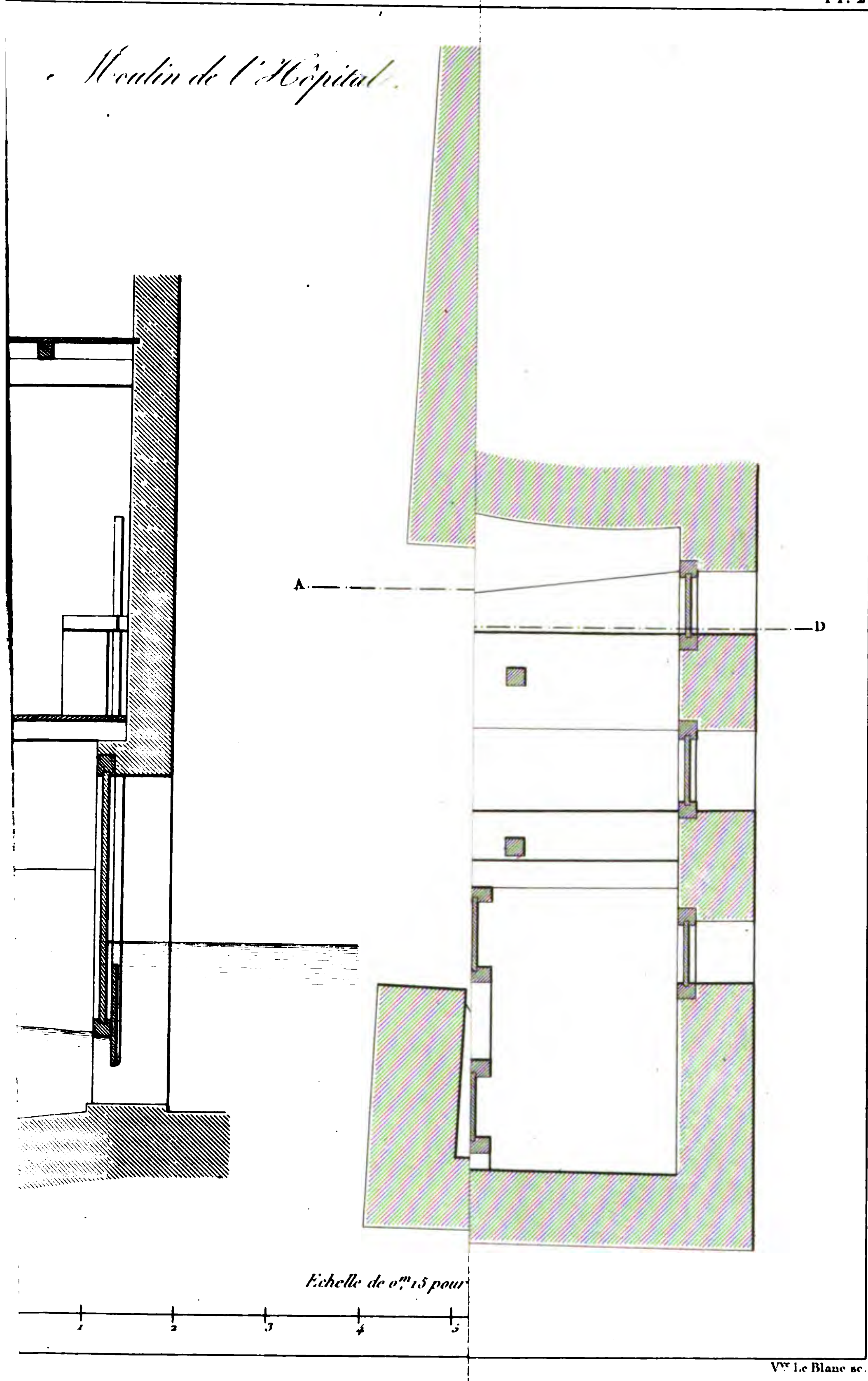
Fig. 2.



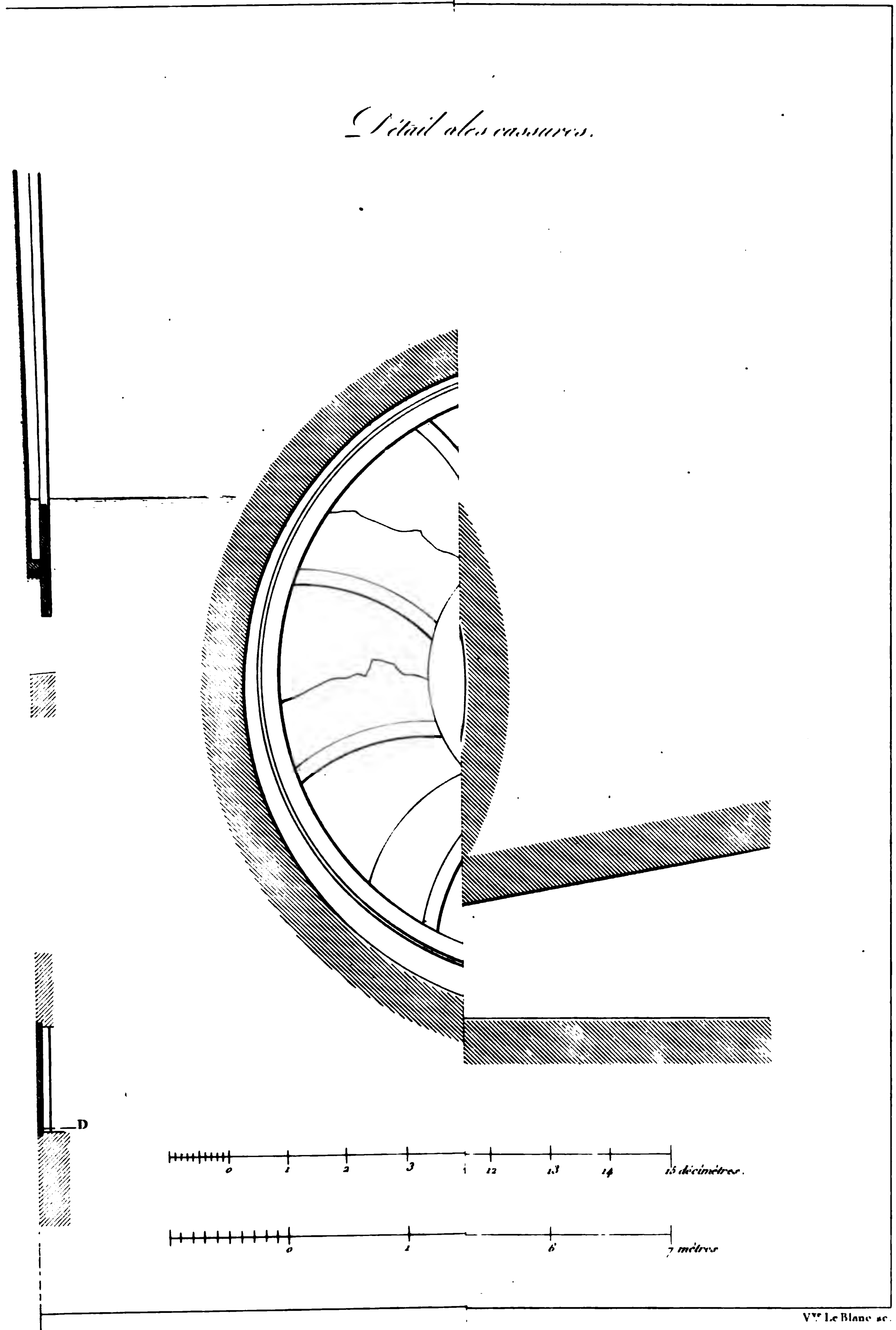
Détails du rouet.



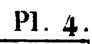




Vve Le Blanc sc.

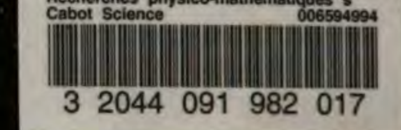


Vve Le Blanc sc.


Pl. 4.

Rapport des effets
Fig. 6.
Fig. 9.
Vitesse
Fig. 7.
Fig. 8.
Vitesse
15 Centimètres.
Vve Le Blanc sc.


FEB 20 1891
JUN 7 1892
72004
CANCELLED
FEB 21 '72 H


Recherches physico-mathématiques s
Cabot Science
006594994
3 2044 091 982 017